$$\begin{cases} x = x_1 + k \cdot v_1 \\ y = y_1 + k \cdot v_2 \end{cases} \qquad k = \frac{x - x_1}{v_1} \qquad k = \frac{y - y_1}{v_2}$$

JAMES M. HENDERSON
RICHARD E. QUANDT

TEORÍA MICROECONÓMICA

UNA APROXIMACIÓN MATEMÁTICA

EDITORIAL ARIEL

TEORÍA MICROECONÓMICA

UNA APROXIMACIÓN MATEMÁTICA

POR

JAMES M. HENDERSON
Profesor de Economía de la Universidad de Harvard

RICHARD E. QUANDT
Profesor de Economía de la Universidad de Princeton

Prólogo de

EMILIO DE FIGUEROA
Profesor de Política Económica de la Universidad de Madrid

Traducción de

JOSE RAMON LASUEN
Profesor de Teoría Económica de la Universidad de Barcelona

EDICIONES ARIEL
BARCELONA

ÍNDICE

PRÓLOGO

Las dos últimas décadas han presenciado una aplicación creciente de métodos matemáticos casi en cada rama de la economía. Las teorías de las unidades de optimización individual y del equilibrio de mercado, incluidas dentro de la rama de la microeconomía, no constituyen excepción. Se ha formulado la teoría tradicional en términos matemáticos, y se han aprobado o descartado los resultados clásicos. El uso de las matemáticas ha permitido también la obtención de muchos resultados nuevos. Los métodos matemáticos son particularmente útiles en este campo, puesto que las premisas implícitas de la maximización de la utilidad y el beneficio son de carácter básicamente matemático.

En las primeras etapas de este desarrollo se dividía a los economistas en dos grupos: los matemáticos y los literarios. Afortunadamente, con el paso del tiempo se está abandonando esta división tan tajante. Un número creciente de economistas y estudiantes de economía se familiarizan, como mínimo, con las matemáticas elementales y están aprendiendo a apreciar las ventajas de su utilización. Por otro lado, muchos economistas de tendencia matemática se van dando cuenta de la limitación de éstas. Parece una predicción prudente asegurar que antes de que pasen muchos años el problema del uso de las matemáticas en la microeconomía será sólo cuestión de grado.

Dado que aumenta el número de economistas y estudiantes de economía con bagaje matemático, el problema básico pasa de ser el de enseñar matemáticas a los economistas al de enseñar economía en términos matemáticos. El volumen presente está concebido para economistas y estudiantes de economía que poseen algunos conocimientos matemáticos pero que no estén especializados en ella. No se trata de un libro de texto de matemáticas para econo-

CAPÍTULO PRIMERO

INTRODUCCIÓN

La economía no es una disciplina claramente definida. Sus fronteras cambian continuamente y su definición es frecuentemente objeto de controversia. Una definición corrientemente utilizada caracteriza la economía como el estudio del uso de recursos limitados para la consecución de fines alternativos. Esta definición es adecuada si se interpreta en un sentido tan amplio que incluya el estudio de recursos inactivos y que cubra situaciones en las que son los propios economistas quienes seleccionan los fines. Más concretamente, se puede definir la economía como una ciencia social que describe las acciones de individuos y grupos de ellos en los procesos de producción, cambio y consumo de bienes y servicios.

1-1. El papel de la teoría

Los objetivos de la economía, como los de la mayor parte de las demás ciencias, son la interpretación y la predicción. Para la consecución de estos objetivos son necesarios tanto los análisis teóricos como las investigaciones empíricas. En casos concretos de investigación ambos están entrelazados inseparablemente; con todo, existe entre ellos una distinción real. Las teorías emplean razonamientos deductivos abstractos con los que sacan conclusiones de una serie de supuestos iniciales. Los estudios puramente empíricos son de naturaleza inductiva. Ambas aproximaciones son complementarias, ya que las teorías proporcionan guías para los estudios empíricos y éstos proporcionan tests sobre los supuestos y conclusiones de las teorías.

Básicamente, una teoría contiene tres grupos de elementos: 1.º los datos, que tienen el papel de parámetros y se suponen dados desde el exterior del armazón analítico; 2.º las variables, cuyas magnitudes se determinan dentro de la teoría, y 3.° supuestos de conducta o postulados que definen la serie de operaciones por las que se determinan los valores de las variables. Las conclusiones de una argumentación teórica son del tipo *"lo que sucedería si"*. Establecen cuáles serían los resultados de los procesos económicos si se satisficiesen los supuestos iniciales, p.ej., si se diesen los datos de hecho y se verificasen los supuestos de conducta.

Las investigaciones empíricas permiten comparar los supuestos y conclusiones de las teorías con los hechos observados. Sin embargo, exigir una exacta conformidad entre la teoría y los hechos desharía el verdadero propósito de la teoría. Las teorías representan simplificaciones y generalizaciones de la realidad, y por tanto no describen perfectamente las situaciones particulares. Hay pocas situaciones reales de mercado, si hay alguna, que satisfagan las especificaciones sobre datos, variables y supuestos de conducta de las teorías presentadas en los capítulos siguientes. Una conformidad más estricta con los hechos requeriría una teoría separada y detallada para cada situación individual de mercado, puesto que cada uno posee sus propias características distintivas. Este tipo de teorías, aunque apreciables para proyectos específicos de investigación, tiene poco valor general. Las teorías más generales son fructíferas porque contienen afirmaciones que abstrayendo particularidades encuentran elementos comunes a muchas situaciones. Al coste de sacrificar detalles obtienen un conocimiento más amplio. Entonces es posible ir de lo general a lo específico. Los casos descritos por las teorías puras proporcionan un conocimiento profundo del proceso económico y sirven como fondo y punto de partida para teorías aplicadas y estudios empíricos concretos.

1-2. Microeconomía

Como la mayor parte de las restantes disciplinas, la economía se divide en ramas y subramas. En años recientes se han distinguido dos ramas principales: *microeconomía,* que es el estudio de las acciones económicas de individuos y grupos de ellos bien definidos, y *macroeconomía,* que es el estudio de grandes agregaciones tales como el empleo total y la renta nacional. Esta dicotomía es un tanto artificial, puesto que las agregaciones son meras sumas de los valores individuales. Sin embargo, se justifica por las diferencias básicas en los objetivos y métodos de las dos ramas.

La diferencia fundamental, pero no la única, entre estas dos ramas de la economía es la contraposición entre la visión microscópica y la macroscópica. Antes de ponerse de moda la distinción micro-macro, la que estaba en uso era análisis de precios-análisis de renta. Tal distinción puede compaginarse con las micro-macro. Los precios tienen un papel preponderante en las teorías microeconómicas, cuyo objetivo es generalmente el análisis de la determinación del precio y la adscripción de recursos concretos a usos particulares. Por otro lado, los objetivos de las teorías macroeconómicas son generalmente la determinación de los niveles de renta nacional y del empleo agregado de recursos.

No se puede decir que en las teorías micro se ignoren los conceptos de renta o que en las macro no existan los precios. Sin embargo, en las teorías micro la determinación de las rentas de los individuos se ensambla dentro del proceso general de precios; los individuos ganan sus rentas vendiendo factores de producción cuyo precio se determina del mismo modo que el de todos los restantes. Por otro lado. los precios son importantes en las teorías macro, pero sus teóricos, generalmente, hacen caso omiso de los problemas de determinación de precios individuales y de sus relaciones y tratan con índices agregados de precios como determinados por el nivel agregado de gasto.

Puesto que en la teoría macro no se consideran los problemas de la determinación individual del precio, la relación entre unidades individuales y agregados no está clara. Si lo estuviese, el análisis se clasificaría como microteoría. Las simplificaciones a que obliga la agregación no quedan sin compensación, puesto que permiten describir el estado y el progreso de la economía como un todo en términos de unos pocos agregados simples. Esto sería imposible si se mantuviese el énfasis micro sobre la conducta individual y los precios relativos.

Siguiendo esta separación micro-macro, el presente volumen se limita a una exposición sistemática de la teoría tradicional microeconómica. En los capítulos 2 a 5 se desarrollan, en tres etapas de generalización creciente, las teorías de la conducta individual y de la determinación del precio en una economía de competencia perfecta. El punto focal de la primera etapa es la conducta del consumidor individual (capítulo 2) y de la empresa (capítulo 3). Se supone que cada individuo considera los precios de los artículos que compra y vende como parámetros dados, sobre cuyas magnitudes no puede influir. Las cantidades de sus adquisiciones y ventas son las variables determinadas por estas teorías. El punto focal de la segunda etapa es el mercado para un solo producto (capítulo 4). Los precios de todos los demás artículos se suponen parámetros dados, y el precio y el volumen de las compras y ventas de este artículo se determinan por las acciones independientes de todos los compradores y vendedores. Finalmente, en la tercera etapa (capítulo 5) se toman en cuenta explícitamente las interrelaciones entre los varios mercados del sistema, y se determinan simultáneamente todos los precios.

Las teorías microeconómicas son lo suficientemente flexibles para permitir muchas variaciones en los supuestos que le sirven de base. Por ejemplo, el supuesto de que ningún individuo puedo por sí solo influir sobre los precios o las acciones de otros individuos se modifica en el capítulo 6. A pesar de la variación de esta premisa básica, la similitud entre los análisis del capítulo 6 y los de los precedentes capítulos es completamente evidente. En el capítulo 8 se relaja el supuesto de un mundo estático en el que los consumidores y los productores no planean para el futuro. De nuevo, es fácilmente discernible la conexión lógica con capítulos precedentes. La posibilidad de relajar estos y otros supuestos aumenta la flexibilidad y la generalidad de las teorías básicas.

Otro importante uso de la teoría es servir como guía de lo que *debe ser*. La subrama de la microeconomía que trata estos problemas se conoce como economía del bienestar y es objeto del capítulo 7. En la economía del bienestar tiene gran importancia el grado de adecuación entre la teoría y los hechos. Cuando la teoría se utiliza exclusivamente para describir, una divergencia entre teoría y hecho sugiere que ésta es deficiente para el fenómeno particular. Cuando la teoría se convierte en un ideal de bienestar, tal divergencia conduce a la conclusión de que lo defectuoso es el fenómeno y que debería por ello remediarse.

1-3. El papel de las matemáticas

Las teorías del presente volumen están expresadas en términos matemáticos. Las matemáticas no son un fin en sí mismas, sino más bien una serie de instrumentos que facilitan la obtención y exposición de las teorías económicas. Las matemáticas son útiles para traducir los argumentos verbales en formas concisas y consistentes. Sin embargo, hacen algo más que esto. Las matemáticas proporcionan al economista una serie de instrumentos a menudo más poderosos que el lenguaje ordinario porque incorporan conceptos y permiten operaciones para las que no existen equivalentes verbales manejables. El uso de las matemáticas aumenta el instrumental del economista y dilata el alcance de las inferencias posibles de los supuestos iniciales.

La primera etapa en el desarrollo de la teoría económica fue el análisis puramente verbal. Sin embargo, a medida que se fueron formulando relaciones cuantitativas en número creciente, y que las teorías se volvían cada vez más complejas, los análisis puramente verbales resultaron más lentos y más difíciles de formular en forma consistente. Las funciones matemáticas sirvieron de base a la mayor parte de estas teorías primitivas, aunque raras veces se hicieron explícitas. El reconocimiento de que se necesitaban formulaciones más rigurosas condujo a la aceptación de la geometría como un instrumento importante de análisis. La geometría fue y es utilísima, pero tiene muchas limitaciones. Una de las más graves es la limitación de las argumentaciones teóricas a dos variables, *o a lo sumo, a tres.* El *creciente* uso de las matemáticas en los últimos años refleja la creencia de que en muchos casos la geometría no es adecuada para razonamientos económicos rigurosos.

Cuando una teoría económica se expresa en términos matemáticos, se deben hacer algunos supuestos acerca de las propiedades matemáticas del fenómeno a investigar. Estos supuestos, como los estrictamente económicos, representan simplificaciones de la realidad. Sin embargo, la abstracción es fructífera si el sacrificio de algún detalle redunda en una ampliación del conocimiento.

El uso de las matemáticas en el presente volumen no significa que los autores crean que deban descartarse todos los análisis verbales y geométricos. Las tres aproximaciones tienen valor. Los análisis verbales sirven para completar muchos detalles, y la geometría es adecuada, incluso preferible, para muchos problemas. En el volumen presente, para esclarecer las similitudes entre los procedimientos geométricos y matemáticos, se usan simultáneamente en el desarrollo de muchas proposiciones.

En el apéndice se revisan los conceptos matemáticos usados en el texto. Todo el mundo, excepto los lectores con grandes conocimientos matemáticos, deberían leer, o al menos hojear, el apéndice *antes* de empezar el capítulo 2.

Capítulo 2

LA TEORÍA DE LA CONDUCTA DEL CONSUMIDOR

El punto de partida acostumbrado en el estudio de la conducta del consumidor es el postulado de su racionalidad. Se supone que el consumidor escoge entre todas las alternativas de consumo posibles, de manera que la satisfacción obtenida de los bienes elegidos (en el más amplio sentido) sea lo mayor posible. Esto implica que se da cuenta de las alternativas que se le presentan y que es capaz de valorarlas. Toda la información relativa a la satisfacción que el consumidor obtiene de las diferentes cantidades de bienes por él consumidos, se halla contenida en su función de utilidad.

El concepto de utilidad y su maximización está vacío de todo significado sensorial. El aserto de que un consumidor experimente mayor satisfacción o utilidad de un automóvil que de un conjunto de vestidos, significa que si se le presentase la alternativa de recibir como regalo un automóvil o un conjunto de vestidos escogería lo primero. Cosas que son necesarias para sobrevivir, como una vacuna cuando se declara una epidemia de viruela, pueden ser para el consumidor de máxima utilidad, aunque el acto de consumirlas no lleve aneja ninguna sensación agradable.

Los economistas del siglo XIX W. Stanley Jevons, Léon Walras y Alfred Marshall consideraban la utilidad medible, al igual que es medible el peso de los objetos. Se presumía que el consumidor poseía una medida cardinal de la utilidad, p. ej., que era capaz de asignar a cada bien o combinación de ellos un número representando la cantidad de utilidad asociada con él. Los números que representaban cantidades de utilidad podían manipularse del mismo modo que los pesos. Supongamos, por ejemplo, que la utilidad de *A* es de 15 unidades y la de *B*, 45 unidades. El consumidor "preferiría" tres veces más *B* que *A*. Las diferencias entre los índices de utilidad podrían compararse y la comparación podría llevar a razonamientos tales como: "*A* es preferible a *B* dos veces lo que C es preferible a D". Los economistas del siglo XIX también suponían que las adiciones a la utilidad total del consumidor, resultantes del consumo de nuevas unidades de un producto, disminuían cuanto más se consumiese del mismo. *La conducta del consumidor puede deducirse de las consideraciones expuestas.* Imaginemos que se pide un cierto precio, digamos 2 dólares, por cada coco. El consumidor que se encuentre con cocos no comprará ninguno si la cantidad de utilidad de que se desprende pagando el precio del coco (o sea, renunciando al poder de adquisición), es mayor que la utilidad que obtiene consumiéndolo. Supongamos que la utilidad de un dólar es de cinco útiles y permanece aproximadamente constante para pequeñas variaciones de renta y que el consumidor obtiene los siguientes incrementos de utilidad cada vez que consume un nuevo coco:

Unidades	Incrementos de utilidad
1.^{er} coco	20
2.^{o} coco	9
3.^{er} coco	7

El consumidor comprará al menos un coco, porque se desprende de 10 útiles a cambio de 20 y esto aumenta su utilidad total.[1] No comprará el segundo porque la utilidad perdida excede a la ganada. En general, el consumidor no aumentará el consumo de un producto si el aumento en una unidad involucra una pérdida neta de utilidad. Sólo aumentará su consumo si con ello realiza una ganancia neta de utilidad. Por ejemplo: supongamos que el precio del coco cae a 1,6 dólares. Ahora se comprarán dos cocos. Una caída del precio ha incrementado la cantidad comprada. Este es el sentido en el que la teoría predice la conducta del consumidor.

Las hipótesis sobre las que está construida la teoría cardinal de la utilidad son muy restrictivas. Se pueden deducir conclusiones equivalentes de hipótesis mucho más débiles. Por este motivo, en el resto del capítulo *no se* supondrá que el consumidor posee una medida cardinal de la utilidad o que la utilidad marginal disminuye a medida que se aumenta el consumo de un producto.

1. El precio son 2 dólares, el consumidor pierde 5 útiles por dólar del que se desprende. Por consiguiente la pérdida total es de 10 útiles, y la ganancia total de 20. [*N. del T.* — Se ha dejado sin traducir la palabra "útil", que es, en el original, una unidad de utilidad. Así como la longitud se mide en metros, la utilidad se mide en útiles.]

Si el consumidor obtiene mayor utilidad de una alternativa *A* que de una *B*, se dice que prefiere *A* a *B*. [2] El postulado de la racionalidad equivale a las siguientes afirmaciones: 1.º En cada posible par de alternativas, *A* y *B*, el consumidor sabe si prefiere *A* a *B*, *B* a *A*, o está indeciso entre ellas; 2.º Sólo una de las tres posibilidades anteriores es verdadera para cada par; 3.º Si el consumidor prefiere *A* a *B* y *B* a *C*, preferirá *A* a *C*. La última afirmación garantiza que las preferencias del consumidor son consistentes o *transitivas:* si se prefiere un automóvil a un conjunto de vestidos, y un conjunto de vestidos a un tazón de sopa, debe preferirse un automóvil a un tazón de sopa.

El postulado de la racionalidad, tal como acaba de establecerse, solamente requiere que el consumidor sea capaz de clasificar los bienes en orden de preferencia. El consumidor posee una medida de la utilidad ordinal, o sea, no necesita ser capaz de asignar números que representan (en unidades arbitrarias) el grado o cantidad de utilidad que obtiene de los artículos. Su clasificación de los mismos se expresa matemáticamente por su función de utilidad. Ésta asocia ciertos números con varias cantidades de productos consumidos, pero estos números suministran sólo una clasificación u orden de preferencia. Si la utilidad de la alternativa *A* es 15 y la de *B* es 45 (o sea, si la función de utilidad asocia el número 15 con la alternativa o bien *A* y el número 45 con la alternativa *B*) sólo puede decirse que *B* es preferible a *A*, pero es absurdo decir que *B* es tres veces preferible a *A*. Esta nueva formulación de los postulados de la teoría del consumidor no se produjo hasta finales del siglo pasado. Es notable que la conducta del consumidor pueda explicarse tan correctamente en términos de una función de utilidad ordinal como en los de una cardinal. Intuitivamente, puede verse que las elecciones del consumidor están completamente determinadas si tiene una clasificación (y sólo una clasificación) de los productos de acuerdo con sus preferencias. Uno puede imaginarse al consumidor poseyendo una lista de productos en orden decreciente de deseabilidad; cuando percibe su renta empieza comprando productos por el principio de la lista y desciende tanto como le permite dicha renta. [3] Por lo tanto, no es necesario presumir que posee una medida cardinal de la utilidad; es suficiente la hipótesis mucho más débil de que posee una clasificación consistente de preferencias.

2. Una cadena de definiciones debe detenerse alguna vez. La palabra "prefiere" se podría definir en el sentido de "gusta más que", pero entonces esta última expresión tendría que dejarse a su vez sin definir. El término preferir está lucro de cualquier significado relacionado con un placer sensorial.

3. Es irrelevante cuánto se apetece un artículo concreto de la lista; siempre se escogerá antes el artículo que ocupe en ella un lugar más elevado.

En la sección 2-1 se estudian los conceptos básicos del análisis y la naturaleza de la función de utilidad. En la sección 2-2 se determina el nivel óptimo de consumo del consumidor individual por dos métodos alternativos, aunque equivalentes. En la sección 2-3 se muestra que la solución del problema del máximo de consumidor es invariable para variaciones monótonas de su función de utilidad. En la sección 2-4 se deducen las curvas de demanda, y en la sección 2-5 se generaliza el análisis al problema de la elección entre renta y ocio. El efecto de las variaciones del precio y de la renta sobre los niveles de consumo se examina en la sección 2-6. En la sección 2-7 se generaliza la teoría a un número indeterminado de artículos. Y en la sección 2-8 se formula de nuevo en términos de una nueva aproximación, la teoría de la preferencia revelada. Finalmente, en la sección 2-9 se analiza el problema de la elección en situaciones de resultados inciertos.

2-1. Conceptos básicos

La naturaleza de la función de utilidad. — Consideremos el caso simplificado en el que las adquisiciones del consumidor están limitadas a dos artículos. Su función de utilidad ordinal es

$$U = f(q_1, q_2) \tag{2-1}$$

donde q_1 y q_2 son las cantidades consumidas de los productos Q_1 y Q_2. Se supone que $f(q_1, q_2)$ es continua, así como su primera y segunda derivadas parciales. La función de utilidad del consumidor no es única (ver sección 2-3). En general, cada incremento individualizado de la función de q_1 y q_2 puede servir como una función de utilidad. El número de utilidad asignado a cada combinación particular de bienes indica que es preferible o superior a todas las combinaciones con números inferiores, e inferior a las de números superiores.

La función de utilidad se define en relación con el consumo en un determinado período de tiempo. El grado de satisfacción que el consumidor experimenta con una combinación de bienes depende de la longitud del período en el que los consume. El grado de satisfacción derivado de consumir diez raciones de helados es distinto si se consumen en una hora que si se consumen en un mes. No hay un tiempo único. No existe un período de tiempo fijo para el que debiera definirse la función de utilidad. Sin embargo, hay restricciones respecto a su posible duración. El consumidor, normalmente, obtiene satisfacción de la variación de su dieta y de la diversidad de los productos que consume. Por esta razón, la función de utilidad no debe definirse para un periodo de tiempo tan corto que no permita satisfacer el deseo de variedad. Por otro lado, si la función se define para un período demasiado largo, los gustos (la forma de la función) pueden variar. En la teoría estática de la conducta del consumidor, cualquier período de tiempo intermedio resulta satisfactorio. [4] Esta teoría es estática en el sentido de que la función de utilidad se define con respecto a un solo período de tiempo, y sólo respecto a este período se analiza el modelo de gasto óptimo del consumidor. No se tiene en cuenta la posibilidad de que pueda transferir gastos de consumo de un período a otro. [5]

Curvas de indiferencia. — El consumidor puede obtener el mismo nivel de utilidad de combinaciones diferentes de Q_1 y Q_2. [6] Para un nivel dado de utilidad U^0, la ecuación (2-1) se convierte en

$$U^0 = f(q_1, q_2) \tag{2-2}$$

donde U^0 es una constante. Dado que la función de utilidad es continua, (2-2) se satisface por un número infinito de combinaciones de Q_1 y Q_2. Imaginemos que el consumidor obtiene un nivel dado de utilidad, U^0, de 5 unidades de Q_1 y 3 unidades de Q_2. Si su consumo de Q_1 descendiese de 5 a 4 sin un incremento en el consumo de Q_2, su utilidad, ciertamente, descendería. En general, es posible compensarle la pérdida de una unidad de Q_1 permitiéndole un aumento en el consumo de Q_2.

Imaginemos que con un aumento de 3 unidades en su consumo de Q_2, le son indiferentes las dos combinaciones alternativas. De manera idéntica es posible determinar otras combinaciones de artículos que pro-

4. La teoría se derrumbaría si fuere imposible definir un periodo de tiempo que no fuese demasiado corto desde el primer punto de vista o demasiado largo desde el segundo.

5. El presente análisis es estático en el sentido de que no considera lo que ocurre después del período de renta actual. Se supone que el consumidor hace, de una vez, los cálculos para uno solo de estos períodos de renta; al final del cual repite sus cálculos para el próximo. Si se le permitiese pedir prestado habría que considerar la totalidad de sus recursos líquidos disponibles en cada tiempo, en vez de su renta estricta. Recíprocamente, podría ahorrar, p. ej., gastar toda su renta en consumo. Sin cambiar los puntos esenciales (véase sección 2-3) es posible ampliar el presente análisis para que comprenda ambas posibilidades.

6. Por definición, un bien es algo de lo que el consumidor prefiere tener mucho que poco. De otro modo se trataría de un dis-bien. En realidad cualquier bien puede convertirse en dis-bien si su cantidad es suficientemente grande. Por ejemplo, si el consumidor toma demasiadas raciones de helado, éste puede llegar a convertirse en un dis-bien. En el resto del capítulo se supone que este grado de saturación no se alcanza nunca.

porcionen al consumidor el mismo grado de satisfacción. El lugar geométrico de todas las combinaciones de artículos que proporcionan al consumidor el mismo grado de satisfacción, es una *curva de indiferencia*. *Un mapa de indiferencia* es el conjunto de curvas de indiferencia correspondientes a distintos niveles de satisfacción. En la fig. 2-1 se miden las cantidades de q_1 y q_2 a lo largo de los ejes respectivos. Por cada punto del cuadrante positivo del plano $q_1\ q_2$ pasa una curva de indiferencia. En la figura 2-1 las curvas de indiferencia corresponden a niveles de satisfacción cada vez mayores a medida que nos movemos en la dirección nordeste. El paso del punto A al B aumentaría el consumo tanto

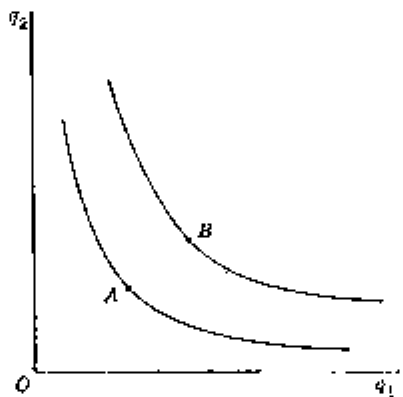


FIGURA 2-1

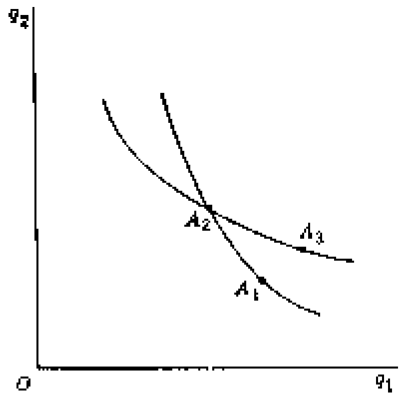


FIGURA 2-2

de Q_1 como de Q_2. Por esta razón debe corresponderle a B un nivel de utilidad más alto que a A.[7]

Las intersecciones de curvas de indiferencia como indica la figura 2-2 son imposibles. En efecto, considérense las combinaciones A_1, A_2 y A_3 de las que el consumidor deriva los siguientes niveles de satisfacción: U_1 del conjunto de bienes representado por A_1 y, de forma similar, U_2 y U_3 de A_2 y A_3. El consumidor posee mayor cantidad de ambos bienes en A_3 que en A_1, y por tanto $U_3 > U_1$. Puesto que A_1 y A_2 están en la misma curva de indiferencia, $U_1 = U_2$. Los puntos A_2 y A_3 están también en la misma curva de indiferencia, y por tanto $U_2 = U_3$. Esto implica que $U_1 = U_3$. Por tanto A_1 y A_2 están en la misma curva de indiferencia, contrariamente a lo supuesto.

7. La expresión "nivel de satisfacción" no debe inducir al lector a pensar en términos de una medida cardinal de la utilidad. La expresión se refiere a que un cierto nivel de satisfacción es más alto o más bajo que otro. Sólo tienen importancia las cualidades ordinales de los niveles de satisfacción.

La relación de sustitución entre artículos. — La diferencial total de la función de utilidad es

$$dU = f_1\, dq_1 + f_2\, dq_2 \tag{2-3}$$

donde f_1 y f_2 son las derivadas parciales de U respecto a q_1 y q_2. El cambio en la utilidad total (comparado con una situación inicial) debido a las variaciones de q_1 y q_2 es aproximadamente igual al cambio en q_1 multiplicado por el cambio de utilidad resultante de una variación unitaria de q_1, más el cambio de q_2 multiplicado por el cambio de utilidad resultante de una variación unitaria de q_2. Si dejamos al consumidor en libertad para moverse a lo largo de una de las curvas de indiferencia dando algo de Q_1 a cambio de algo de Q_2, se tendrá que si su consumo de Q_1 disminuye en dq_1 (por tanto $dq_1 < 0$), la pérdida de utilidad resultante es aproximadamente $f_1 dq_1$. Por razones similares el aumento de utilidad causado por la adquisición de Q_2 es aproximadamente $f_2 dq_2$. Tomando arbitrariamente pequeños incrementos, la suma de estos dos términos debe tener límite cero, ya que el cambio total de utilidad a lo largo de una curva de indiferencia es nulo, por definición.[8] Como el análisis se desarrolla en términos de funciones de utilidad ordinales, las magnitudes $f_1 dq_1$ y $f_2 dq_2$ son desconocidas. Sin embargo, debe continuar siendo cierto que la suma de estos dos términos es cero. Haciendo $dU = 0$,

$$f_1\, dq_1 + f_2\, dq_2 = 0$$

de donde

$$-\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_1}{f_2} \tag{2-4}$$

La pendiente de una curva de indiferencia, dq_2/dq_1, es la relación a la que un consumidor estará dispuesto a sustituir Q_2 por Q_1 o Q_1 por Q_2 en orden a mantener un nivel dado de utilidad. Con signo negativo, dq_2/dq_1, es la relación de sustitución entre bienes (RSB) de Q_2 por Q_1 o Q_1 por Q_2 e iguala la razón de las derivadas parciales de la función de utilidad.[9] La RSB en un punto de una curva de indiferencia tiene el

8. Imagínese la función de utilidad como una superficie en un espacio tridimensional. Entonces, la diferencial total (2-3) es la ecuación del plano tangente a esta superficie en un punto. Esto justifica el uso de la palabra aproximadamente en la argumentación anterior (véase sección A-3).

9. En la literatura económica aparece frecuentemente la relación de sustitución entre bienes bajo la denominación de relación marginal de sustitución, aunque el término "marginal" es redundante. Cf. J. R. Hicks, *Value and Capital* (2.ª ed., Oxford: Clarendon Press, 1946), parte I.

mismo valor para movimientos en ambas direcciones. Es intrascendente el que la definición verbal sea sustituir Q_1 por Q_2 o viceversa.

En un análisis cardinal las derivadas parciales f_1 y f_2 se definen como las utilidades marginales de los bienes Q_1 y Q_2,[10] definición que se mantiene en el presente análisis ordinal. Sin embargo, la derivada parcial de una función de utilidad ordinal no tiene interpretación cardinal. Por ello, las magnitudes numéricas de las utilidades marginales individuales no tienen ningún sentido. El análisis presente no supone al consumidor enterado de la existencia de las utilidades marginales, y sólo el economista necesita saber que la *RSB* del consumidor iguala la razón de las utilidades marginales. Tanto los signos como las razones de las utilidades marginales están llenos de significado para un análisis ordinal. Un valor positivo de f_1 significa que un incremento de q_1 aumentará el nivel de satisfacción del consumidor y lo llevará a una curva de indiferencia de orden superior.

2-2. La maximización de la utilidad

El consumidor racional desea adquirir aquella combinación de Q_1 y Q_2 con la que obtenga un nivel de satisfacción más alto. Su problema es de maximización. Sin embargo, su renta es limitada y no puede adquirir una cantidad ilimitada de productos. La ecuación de balance * del consumidor puede representarse de la siguiente forma

$$y^0 = p_1 q_1 + p_2 q_2 \tag{2-5}$$

donde y^0 (fijo) es su renta y p_1 y p_2 son los precios de Q_1 y Q_2 respectivamente. La cantidad que gasta en el primer producto (p_1q_1) más la cantidad que gasta en el segundo (p_2q_2) es igual a su renta (y^0).

MÉTODO 1. — Para maximizar la función de utilidad condicionada a la ecuación de balance, el consumidor debe encontrar la combinación de bienes que satisfaga (2-5) y al mismo tiempo maximice la función de utilidad (2-1). Trasponiendo p_1q_1 a la izquierda en (2-5) y dividiéndolo todo por p_2, la ecuación de balance pasa a ser

$$y^0/p_2 - p_1 q_1/p_2 = q_2$$

10. La utilidad marginal se define a menudo libremente como el incremento de utilidad resultante de un aumento unitario en el consumo.

* Se ha traducido el término "budget constraint" por "ecuación de balance" por ser éste el término introducido en la terminología económica española. Debe entenderse por tal la restricción que viene impuesta al consumidor por su balance de caja

Sustituyendo este valor de q_2 en (2-1), la función de utilidad se transforma en función de q_1 solamente:

$$U = f\left(q_1, \frac{y^0 - p_1 q_1}{p_2}\right) \tag{2-6}$$

A causa de la relación fija existente entre q_1 y q_2, establecida por la ecuación de balance, es suficiente maximizar (2-6) respecto a q_1. Finalmente las condiciones necesarias y suficientes se satisfacen si $dU/dq_1 = 0$ (condición de primer grado) y $d^2U/dq_1^2 < 0$ (condición de segundo grado).

Haciendo igual a cero la primera derivada de (2-6): [11]

$$\frac{dU}{dq_1} = f_1 + f_2\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) = 0 \tag{2-7}$$

Trasponiendo el segundo término de (2-7) a la derecha y dividiendo por f_2, queda

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2} \tag{2-8}$$

que indica que en un máximo la razón de las utilidades marginales debe igualarse a la de los precios. Ya que f_1/f_2 es la *RSB*, la condición de primer grado del máximo viene dada por la igualdad entre la *RSB* y la razón de los precios. Podemos escribir de nuevo la ecuación (2-8) de la forma siguiente.

$$\frac{f_1}{p_1} = \frac{f_2}{p_2} \tag{2-9}$$

que indica que la utilidad marginal dividida por el precio debe ser la misma para todos los productos. Esta razón nos da la relación en que aumentaría la satisfacción si se gastase un dólar adicional en un producto concreto. Si el consumidor pudiese obtener mayor satisfacción gastando un dólar adicional en Q_1 que en Q_2, no estaría maximizando su utilidad. Podría, en efecto, aumentar su satisfacción trasladando parte de su gasto de Q_2 a Q_1. La ecuación (2-9) es condición necesaria para el máximo, pero no garantiza que se alcance.

Llamando f_{11} y f_{22} a las segundas derivadas parciales directas de

11. Se han utilizado las reglas de la función compuesta y de la función de función (véanse secciones A-2 y A-3).

(2-1) y f_{12} y f_{21} a sus segundas derivadas parciales cruzadas, la condición de segundo grado de un máximo exige que

$$\frac{d^2U}{dq_1^2} = f_{11} + 2f_{12}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right) + f_{22}\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)^2 < 0$$

Multiplicando por p_2^2 (un número positivo),

$$f_{11}\,p_2^2 - 2\,f_{12}\,p_1\,p_2 + f_{22}\,p_1^2 < 0 \tag{2-10}$$

Se obtiene un máximo si se mantiene (2-10) además de (2-8) y (2-9).

Mediante una nueva diferenciación de (2-4) se determina que la relación que expresa la variación de la pendiente de la curva de indiferencia es.[12]

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = -\frac{1}{f_2^3}\,(f_{11}\,f_2^2 - 2\,f_{12}\,f_1\,f_2 + f_{22}\,f_1^2) \tag{2-11}$$

y sustituyendo $f_1 = p_1f_2/p_2$ de (2-8) en (2-11)

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = -\frac{1}{f_2\,p_2^2}\,(f_{11}\,p_2^2 - 2\,f_{12}\,p_1\,p_2 + f_{22}\,p_1^2) \tag{2-12}$$

La desigualdad (2-10) asegura que el término entre paréntesis del lado derecho de la ecuación (2-12) es negativo. De aquí que d^2q_2/dq_1^2 sea positiva, y que las curvas de indiferencia sean convexas hacia abajo. Las ecuaciones (2-4) y (2-8) conjuntamente, implican que siempre que los precios sean positivos las curvas de indiferencia tienen inclinación negativa. Si existe un máximo, las curvas de indiferencia adoptan la forma general representada en la figura 2-1.

Supongamos que la función de utilidad es $U = q_1q_2$, que $p_1 = 2$ dólares, $p_2 = 5$ dólares, y que la renta del consumidor para el período considerado es de 100 dólares. La ecuación de balance es

$$100 - 2\,q_1 - 5\,q_2 = 0$$

Expresando q_2 en función de q_1 en la ecuación de balance, queda

$$q_2 = 20 - \frac{2\,q_1}{5}$$

12. Nótese que (2-11) se obtiene tomando la derivada total de la pendiente de la curva de indiferencia en vez de su derivada parcial.

Sustituyendo en la función de utilidad, resulta

$$U = 20\,q_1 - \frac{2\,q_1^2}{5}$$

De donde

$$\frac{dU}{dq_1} = 20 - \frac{4\,q_1}{5}$$

Haciendo dU/dq_1 igual a cero, y hallando el valor de q_1, se obtiene $q_1 = 25$. Sustituyendo este valor en la ecuación de balance da $q_2 = 10$. Para estos valores de q_1 y q_2 la derivada segunda de la función de utilidad es negativa, como puede constatar el lector verificando la diferen-

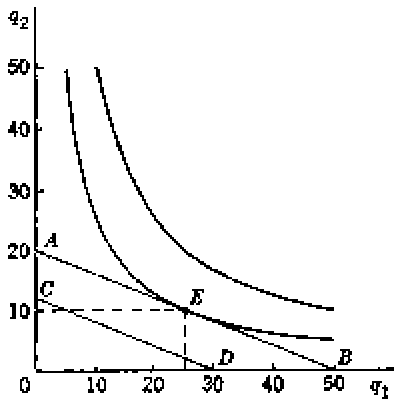


FIGURA 2-3

ciación necesaria. El consumidor maximiza su utilidad consumiendo la combinación así determinada.

La figura 2-3 es una representación gráfica de este ejemplo. La línea de precios AB es la representación geométrica de la ecuación de balance, y muestra todas las posibles combinaciones de Q_1 y Q_2 que el consumidor pueda adquirir. Su ecuación es $100 - 2q_1 - 5q_2 = 0$. El consumidor puede comprar 50 unidades de Q_1 si no compra ninguna de Q_2, 20 unidades de Q_2 si no compra ninguna de Q_1, etc. A cada posible nivel de renta corresponde una línea de precios diferente; si la renta del consumidor fuese de 60 dólares, la línea de precios correspondiente sería la CD. En este ejemplo, las líneas de indiferencia son una familia de hipérbolas equiláteras.[13] El consumidor desea alcanzar la más alta

13. Las hipérbolas cuyas asíntotas coinciden con los ejes de coordenadas.

de las curvas de indiferencia, que tenga, por lo menos, un punto común con AB. Su equilibrio está en el punto E, en el cual AB es tangente a una curva de indiferencia. Movimientos en ambas direcciones del punto E redundan en disminución de su nivel de utilidad. La pendiente constante de la línea de precios, $-p_1/p_2$ o $-2/5$ en el ejemplo presente, debe igualarse a la pendiente de la curva de indiferencia. Siendo la razón de las derivadas parciales de la función de utilidad, la pendiente de las curvas de indiferencia, en el presente ejemplo, $-q_2/q_1$, y de aquí que la RSB iguala $q_2/q_1 = 10/25$, que es igual a la razón de los precios $2/5$ como se pedía. *Las curvas de indiferencia son convexas hacia abajo porque* $d^2q_2/dq_1^2 = 2q_2/q_1^2 > 0$.

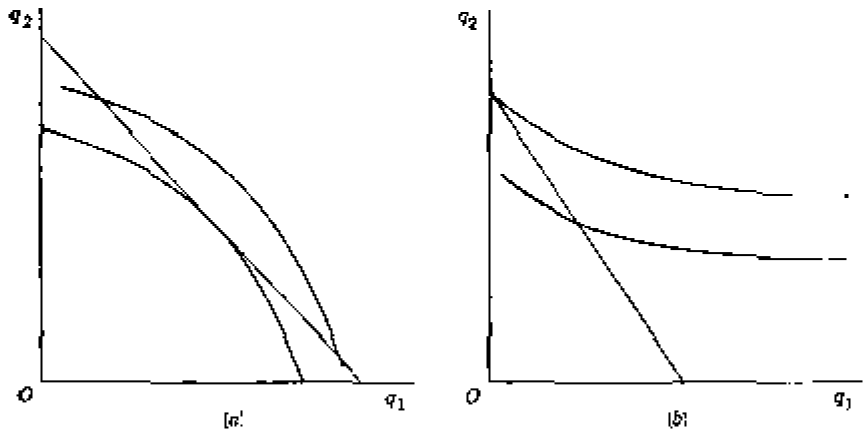


FIGURA 2-4

La condición de primer grado (2-8) o (2-9) no es necesaria para un máximo en dos casos especiales: *1) Si las curvas de indiferencia son cóncavas hacia abajo, y 2) si las curvas de indiferencia son convexas hacia abajo, pero son en toda su extensión más elevadas (o menos) que la línea de precios.* En ambos casos, la posición óptima del consumidor viene dada por una solución extrema. En el primer caso, la condición de primer grado para un máximo se satisface en el punto de tangencia entre *la línea de precios y la curva de indiferencia, pero la condición de segundo grado no* (véase fig. 2-4 *a*). Por esta razón, este punto representa una situación de mínima utilidad, y el consumidor puede aumentarla moviéndose desde el punto de tangencia hacia ambos ejes. En el óptimo, consume sólo un producto. Si gasta toda su renta en un producto, puede comprar y^0/p_1 unidades de Q_1 o y^0/p_2 unidades de Q_2. De aquí que *comprará sólo Q_1 o sólo Q_2*, dependiendo de si $f(y^0/p_1, 0) \gtrless f(0, y^0/p_2)$.

En el segundo caso, aunque se pueda satisfacer la condición de segundo grado, no puede producirse la tangencia (no se puede cumplir la condición de primer grado) (véase fig. 2-4*b*). Los métodos de cálculo no pueden aplicarse a causa de las restricciones $q_1 \geqq 0$, $q_2 \geqq 0$. Como antes, el consumidor, en el óptimo, adquiere sólo un producto.

Método 2. — Usando la técnica del multiplicador de Lagrange se puede llegar a las mismas conclusiones. De la función de utilidad (2-1) y la ecuación de balance (2-5) formamos la función

$$V = f(q_1, q_2) + \lambda (y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2) \qquad (2\text{-}13)$$

donde λ es el, hasta ahora indeterminado, multiplicador de Lagrange (véase sección A-3). V es una función de q_1, q_2 y λ. Por otra parte, V es idéntico a U para aquellos valores de q_1 y q_2 que satisfagan la ecuación de balance, puesto que $y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$. Para maximizar V, calculemos las derivadas parciales de V respecto a las tres variables e igualémoslas a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_1} &= f_1 - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} &= f_2 - \lambda p_2 = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \lambda} &= y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0 \end{aligned} \qquad (2\text{-}14)$$

La condición de primer grado (2-8) se obtiene inmediatamente de (2-14) trasponiendo a la derecha los segundos términos de las dos primeras ecuaciones de (2-14) y dividiendo la primera ecuación por la segunda. La condición de segundo grado para un máximo condicionado es que el Hessiano orlado relevante sea positivo:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (2\text{-}15)$$

Desarrollando (2-15)

$$2 f_{12} p_1 p_2 - f_{22} p_1^2 - f_{11} p_2^2 > 0$$

que es lo mismo que (2-10).[14]

14. Véase sección A-1 sobre el desarrollo de un determinante y sección A-3 sobre el máximo condicionado.

2-3. La elección del índice de utilidad

Los números que la función de utilidad asigna a las combinaciones alternativas de productos no precisan tener significación cardinal; deben servir sólo como un índice de la satisfacción del consumidor. Imaginemos que se quiere comparar la satisfacción que un consumidor obtiene de un sombrero y dos camisas y de dos sombreros y cinco camisas. Se sabe que el consumidor prefiere la segunda combinación a la primera. Los números que se asignan a estas combinaciones, con el propósito de mostrar la intensidad de sus preferencias, son arbitrarios en el sentido de que la diferencia entre ellos no tiene significado. Puesto que se prefiere el segundo lote al primero, puede asignarse el número 3 a éste y el 4 a aquél. Sin embargo, cualquier otra serie de números serviría lo mismo, mientras que el asignado al segundo lote fuese mayor que el asignado al primero. De este modo, 3 para el primer lote y 400 para el segundo serían índices de utilidad igualmente satisfactorios. Si un conjunto particular de números asociado con varias combinaciones de Q_1 y Q_2 es un índice de utilidad, cualquier transformación monótona suya es también un índice de utilidad.[15] Supongamos que la función de utilidad es $U = f(q_1, q_2)$. Formemos ahora un nuevo índice de utilidad $W = F(U) = F[f(q_1, q_2)]$ aplicando una transformación monótona al índice de utilidad original. La función $F(U)$ es entonces una función monótona (creciente) de U.[16] Se puede demostrar que, sujetos a la ecuación de balance, maximizar W es equivalente a maximizar U. Formemos la función

$$Z = F\,[f\,(q_1, q_2)] + \lambda\,(y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2)$$

e igualemos a cero las derivadas parciales respecto a q_1, q_2 y λ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial q_1} &= F'f_1 - \lambda\,p_1 = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial q_2} &= F'f_2 - \lambda\,p_2 = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda} &= y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0 \end{aligned} \qquad (2\text{-}16)$$

15. Una función $F(U)$ es una transformación monótona de U si $F(U_1) > F(U_0)$ siempre que $U_1 > U_0$.

16. Proporcionan ejemplo de ello las transformaciones $W = aU + b$, provisto que a sea positivo, y $W = U^a$, y provisto que todos los números de utilidad sean no negativos.

donde F' es la derivada de F con respecto a su argumento.[17] Trasponiendo los segundos términos de las dos primeras ecuaciones de (2-16) y dividiendo la primera ecuación por la segunda, tenemos:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2} \tag{2-17}$$

Esto prueba que las condiciones de primer grado son invariables respecto a la elección concreta del índice de utilidad.[18] La razón de las utilidades marginales debe igualarse a la razón de los correspondientes precios, independientemente de la elección de un índice de utilidad. Las utilidades marginales para diversos índices pueden ser completamente diferentes, pero no son importantes para la maximización de la utilidad; la razón de las utilidades marginales es asimismo independiente del índice de utilidad.

Las derivadas parciales de segundo grado de Z son

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial q_1^2} = F''f_1^2 + F'f_{11}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial q_2^2} = F''f_2^2 + F'f_{22}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \lambda^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial q_1 \partial q_2} = F''f_1 f_2 + F'f_{12}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial q_2 \partial q_1} = F''f_1 f_2 + F'f_{21}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial q_1 \partial \lambda} = -p_1$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial q_2 \partial \lambda} = -p_2$$

La condición de segundo grado para un máximo establece que

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} F''f_1^2 + F'f_{11} & F''f_1 f_2 + F'f_{12} & -p_1 \\ F''f_1 f_2 + F'f_{21} & F''f_2^2 + F'f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \tag{2-18}$$

17. Los argumentos de una función son las variables de las que depende. Nótese que se aplica la regla de la función de función (véase sección A-2).

18. El supuesto de que F es una transformación monótona garantiza que $F' \neq 0$.

y se puede mostrar que este determinante es el mismo que (2-15). El valor de un determinante no se altera si un múltiplo de una fila se añade a alguna otra o si un múltiplo de una columna se añade a otra columna. *Multiplicando por un número dado una fila o una columna* del determinante es equivalente a multiplicar por dicho número el valor del determinante (ver sección A-1). De las dos primeras ecuaciones de (2-16) tenemos:

$$p_1 = \frac{F'f_1}{\lambda}$$

$$p_2 = \frac{F'f_2}{\lambda}$$

Sustituyendo estos valores de p_1 y p_2 en (2-18)

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} F''f_1^2 + F'f_{11} & F''f_1f_2 + F'f_{12} & -F'f_1/\lambda \\ F''f_1f_2 + F'f_{21} & F''f_2^2 + F'f_{22} & -F'f_2/\lambda \\ -F'f_1/\lambda & -F'f_2/\lambda & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (2\text{-}19)$$

Multiplicando la última fila y la última columna de (2-19) por λ/F', se tiene:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{F'}{\lambda}\right)^2 \begin{vmatrix} F''f_1^2 + F'f_{11} & F''f_1f_2 + F'f_{12} & -f_1 \\ F''f_1f_2 + F'f_{21} & F''f_2^2 + F'f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Sumemos ahora $F''f_1$ veces la última fila a la primera y $F''f_2$ veces la *última a la segunda. A permanece invariable con ello*

$$\mathbf{A} = \left(\frac{F'}{\lambda}\right)^2 \begin{vmatrix} F'f_{11} & F'f_{12} & -f_1 \\ F'f_{21} & F'f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Sustituyamos $-\frac{\lambda p_1}{F'}$ por $-f_1$ y $-\frac{\lambda p_2}{F'}$ por $-f_2$ en las dos primeras ecuaciones de (2-16) y entonces multipliquemos la última fila y la última columna por $\frac{F'}{\lambda}$:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} F'f_{11} & F'f_{12} & -p_1 \\ F'f_{21} & F'f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Ahora multipliquemos la última columna por F' y dividamos las dos primeras filas por F'

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} (F') > 0 \qquad (2\text{-}20)$$

Por hipótesis, F es una transformación monótona; de aquí que F' sea positiva y el signo de $\mathbf{A}$ sea el mismo que el signo del determinante del lado derecho de (2-20). Sin embargo, el determinante del lado derecho de (2-20) es idéntico a (2-15). Esto demuestra que la condición de segundo grado es invariable con respecto a la elección del índice de utilidad. De la invariabilidad de las condiciones de primer y segundo grados se sigue que si se maximiza el índice de utilidad U, también lo será el W. Puede concluirse que si el consumidor maximiza su utilidad sujeto a su ecuación de balance para un índice de utilidad dado, se conducirá de igual manera independientemente del índice de utilidad escogido, mientras que el elegido sea una transformación monótona del original. Si una función de utilidad se maximiza para un determinado grupo de productos, el mismo grupo maximizará todas las demás funciones de utilidad que sean transformaciones monótonas del mismo. La función de utilidad del consumidor es única excepto para una transformación monótona.[19]

Escojamos el índice de utilidad $U^* = q_1^2 q_2^2$, que es una transformación monótona de $U = q_1 q_2$.[20] Formemos la función

$$V^* = q_1^2 q_2^2 + \lambda (y^0 - 2q_1 - 5q_2)$$

e igualemos a cero sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial V^*}{\partial q_1} = 2q_1 q_2^2 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial q_2} = 2q_1^2 q_2 - 5\lambda = 0$$

19. Esta proposición puede probarse intuitivamente del modo siguiente. Cada función unívoca U puede servir como una función de utilidad si *guarda el orden*, o sea: $U(A) > U(B)$ si, y sólo si, A se prefiere a B. Si $F(U)$ es una transformación monótona, $F[U(A)] > F[U(B)]$, y la función $F(U)$ guarda el orden.

20. La nueva función de utilidad se obtiene elevando al cuadrado la primitiva. La elevación al cuadrado no es una transformación monótona si se admiten los números negativos. Sin embargo, en el caso presente la elevación al cuadrado es adecuada desde el momento que no se admite la posibilidad de adquisiciones negativas por parte del consumidor.

$$\frac{\partial V^*}{\partial \lambda} = y^0 - 2q_1 - 5q_2 = 0$$

Sustituyendo $y^0 = 100$ y despejando q_1 y q_2, se obtienen los mismos valores que antes: $q_1 = 25$ y $q_2 = 10$.

2-4. Curvas de demanda

La curva de demanda del consumidor de un producto da la cantidad que comprará en función de su precio. Las curvas de demanda pueden deducirse del análisis de la maximización de la utilidad. Las condiciones de primer grado para maximizar (2-14) consisten en tres ecuaciones con tres incógnitas: q_1, q_2 y λ.[21] Las curvas de demanda se obtienen resolviendo las incógnitas de este sistema. Las soluciones de q_1 y q_2 están en términos de los parámetros p_1, p_2 y y^0. La cantidad de Q_1 (o de Q_2) que el consumidor adquiera en el caso general depende de los precios de todos los productos y de su renta.

Como antes, supongamos que la función de utilidad es $U = q_1q_2$ y la ecuación de balance $y^0 - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$. Formemos la expresión

$$V = q_1 q_2 + \lambda (y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2)$$

e igualemos a cero sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = q_2 - p_1 \lambda = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = q_1 - p_2 \lambda = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$$

Las soluciones de q_1 y q_2 nos dan las funciones de demanda:[22]

$$q_1 = \frac{y^0}{2p_1} \qquad q_2 = \frac{y^0}{2p_2}$$

Las funciones de demanda obtenidas de esta forma son contingentes de que el consumidor optimice continuamente su conducta. Dados la ren-

21. Suponemos que se cumplen las condiciones de segundo grado.
22. Nótese que estas curvas de demanda son un caso especial en el que la demanda de cada artículo depende solamente de su precio y de la renta.

ta del consumidor y los precios de los productos, de sus funciones de demanda se pueden determinar las cantidades por él pedidas de cada producto. Desde luego, estas cantidades son idénticas a las obtenidas directamente de la función de utilidad. Sustituyendo $y = 100$, $p_1 = 2$, $p_2 = 5$ *en la función de demanda, da* $q_1 = 25$ y $q_2 = 10$, *como en* la sección 2-2.

De las funciones de demanda se pueden deducir dos propiedades importantes: 1) La demanda de cualquier producto es una función unívoca de los precios y la renta, y 2) las funciones de demanda son homogéneas de grado cero en precios y renta, o sea: si todos los precios y la renta varían en la misma proporción, las cantidades demandadas permanecen invariables.

La primera propiedad proviene de la convexidad de las curvas de indiferencia: a una serie dada de precios y renta corresponde un solo máximo, y por tanto, una sola combinación de productos. Para probar la segunda propiedad supongamos que todos los precios y la renta varían en la misma proporción. La ecuación de balance se transforma en

$$ky^0 - kp_1 q_1 - kp_2 q_2 = 0$$

donde k es el factor de proporcionalidad. La expresión (2-13) se transforma en

$$V = f(q_1, q_2) + \lambda (ky^0 - kp_1 q_1 - kp_2 q_2)$$

y las condiciones de primer grado son

$$\begin{aligned} f_1 - \lambda k p_1 &= 0 \\ f_2 - \lambda k p_2 &= 0 \\ ky^0 - kp_1 q_1 - kp_2 q_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2-21}$$

La última ecuación de (2-21) es la derivada parcial de V respecto al multiplicador de Lagrange y puede escribirse de nuevo como

$$k(y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2) = 0$$

Puesto que $k \neq 0$,

$$y^0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$$

Trasladando los segundos términos a la derecha y dividiendo la primera ecuación por la segunda se elimina k de las dos primeras ecuaciones (2-21).

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Las dos últimas ecuaciones son las mismas que (2-5) y (2-8). De aquí que la curva de demanda se derive de las mismas ecuaciones para la serie de precio-renta (kp_1, kp_2, ky^0), que para la serie (p_1, p_2, y^0). Es igualmente fácil demostrar que las condiciones de segundo grado no se ven afectadas. Esto prueba que las funciones de demanda son homogéneas de grado cero en precios y renta. Si todos los precios y la renta del consumidor aumentan en la misma proporción, las cantidades demandadas por el consumidor no varían. Esto implica una restricción importante y empíricamente comprobable sobre la conducta del consumidor; significa que, en términos de renta real, no se comportará como si fuese más rico (o más pobre) si su renta y los precios se elevan en la misma proporción. Un aumento en la renta monetaria es, *ceteris paribus*, deseable para el consumidor, pero el beneficio a derivar de ello es ilusorio si los precios cambian proporcionalmente. Estos cambios proporcionales dejan su conducta inalterable, siempre que no exista "ilusión monetaria". [23]

En general, la curva de demanda del consumidor de un producto Q_1 se escribe

$$q_1 = \varphi\,(p_1, p_2, y^0) \tag{2-22}$$

o, suponiendo que p_2 e y son parámetros dados [24]

$$q_1 = D\,(p_1) \tag{2-23}$$

La forma de la función de demanda depende de las propiedades de la función de utilidad del consumidor. Generalmente se supone que las curvas de demanda tienen pendiente negativa: a menor precio, mayor cantidad demandada. En casos excepcionales puede sostenerse la relación opuesta. Un ejemplo de ello es el consumo de lujo. Si el consu-

23. Si el consumidor posee un stock de caja (masa de dinero), puede sentirse más rico a pesar de una caída proporcional de los precios de los productos y de la renta, ya que el poder adquisitivo de su stock aumenta. Consecuentemente puede aumentar su demanda de artículos. Este es el efecto Pigou.

24. En general, las curvas de demanda pueden también escribirse así: $p_1 = \psi(q_1)$. Si el precio es p_1^0 y el consumidor adquiere q_1^0 unidades, su gasto total en el artículo es $p_1^0 q_1^0$ dólares. Se ha sostenido que el área por debajo de la curva de demanda hasta el punto $q_1 = q_1^0$ representa la suma de dinero que el consumidor estaría dispuesto a pagar por q_1^0 del artículo antes que carecer de él. La diferencia entre lo que estaría dispuesto a pagar y lo que paga en realidad, $\int_0^{q_1^0} \psi(q_1)\,dq_1 - p_1^0 q_1^0$ es el "excedente del consumidor", o sea: una medida del beneficio neto que deriva de comprar Q_1. Existen varias definiciones alternativas del excedente del consumidor, y el concepto se ha afinado considerablemente, pero no ha significado un avance notable por estar basado en la hipótesis de la cardinalidad.

midor deriva utilidad de pagar un precio alto, la función de demanda puede tener pendiente positiva. En la sección 2-6 se analiza detalladamente la naturaleza de los cambios de las cantidades demandadas debidos a cambios de precio. En las demás partes de este volumen se supone que la función de demanda tiene pendiente negativa.

2-5. Renta y ocio

Si la renta del consumidor es remuneración de su trabajo, del análisis de la maximización de la utilidad se puede determinar la cantidad óptima de trabajo que realiza. De este análisis puede también deducirse la curva de demanda de renta del consumidor. Supongamos que la satisfacción del consumidor depende de la renta y el ocio. Su función de utilidad

$$U = g\,(L, y) \tag{2-24}$$

donde L representa el ocio. La renta y el ocio son ambos deseables. En las secciones precedentes se supone que el consumidor obtiene utilidad de los productos que adquiere con su renta. En la construcción de (2-24) se supone que compra varios productos en proporciones fijas a precios constantes, y de aquí que la renta se trate como poder general de compra.

La relación de sustitución entre renta y ocio es

$$-\frac{dy}{dL} = \frac{g_1}{g_2}$$

Llamemos W a la cantidad de trabajo realizada por el consumidor y r al salario tipo. Por definición,

$$L = T - W \tag{2-25}$$

donde T es la cantidad total de trabajo disponible.[25] La ecuación de balance es

$$y = r\,W \tag{2-26}$$

Sustituyendo (2-25) y (2-26) en (2-24), tenemos:

$$U = g\,(T - W, rW) \tag{2-27}$$

Para maximizar la utilidad igualemos a cero la derivada de (2-27) respecto a W:[26]

25. Por ejemplo, si el período para el que se define la función de utilidad es un día, $T = 24$ horas.

26. Se emplea la regla de la función compuesta.

$$\frac{dU}{dW} = -g_1 + g_2 r = 0$$

y, por tanto,

$$-\frac{dy}{dL} = \frac{g_1}{g_2} = r \qquad (2\text{-}28)$$

lo que establece que la relación de sustitución de renta por ocio es igual al tipo de salario. La condición de segundo grado requiere que

$$\frac{d^2U}{dW^2} = g_{11} - 2\,g_{12}\,r + g_{22}\,r^2 < 0$$

La ecuación (2-28) es una relación en términos de W y r que se basa en el supuesto de que el consumidor individual optimiza su conducta. Es, por tanto, la curva de oferta de trabajo del consumidor y establece cuánto trabajará a los diferentes tipos de salario. Ya que la oferta de trabajo es equivalente a la demanda de renta, (2-28) proporciona indirectamente la curva de demanda de renta del consumidor.

Supongamos que la función de utilidad tiene la misma forma que en las secciones previas: $U = Ly$. Entonces

$$U = (T - W)\,Wr$$

e igualando a cero la derivada

$$\frac{dU}{dW} = Tr - 2\,Wr = 0$$

De aquí que $$W = \frac{T}{2}$$

y sustituyendo en (2-26)

$$y = \frac{rT}{2}$$

puede inferirse que el consumidor trabajará 12 horas por día independientemente del nivel de salarios. La condición de segundo grado se satisface:

$$\frac{d^2U}{dW^2} = -2\,r < 0$$

La función de utilidad proporciona otro ejemplo alternativo:

$$U = Ly - 0{,}1\,L^2 - 0{,}1\,y^2 = (T - W)\,Wr - 0{,}1\,(T - W)^2 - 0{,}1\,W^2r^2$$

Entonces

$$\frac{dU}{dW} = -Wr + (T-W)\,r + 0{,}2\,(T-W) - 0{,}2\,Wr^2 = 0$$

y

$$W = \frac{T\,(r + 0{,}2)}{2\,(0{,}1 + r + 0{,}1\,r^2)}$$

La cantidad de trabajo realizado depende ahora del tipo de salario. Si $r = 1$ dólar, el individuo trabajará 12 horas por día. La condición de segundo grado se satisface igualmente:

$$\frac{d^2U}{dW^2} = -2\,(0{,}1 + r + 0{,}1\,r^2) < 0$$

2-6. Efectos de sustitución y renta

La ecuación de Slutsky. — Las cantidades compradas por un consumidor racional satisfarán siempre las ecuaciones (2-14). Cambios en los precios y la renta alterarán normalmente su forma de gasto, pero las nuevas cantidades (y precios y renta) seguirán satisfaciendo (2-14). Para conocer la magnitud del efecto, sobre las compras del consumidor, de los cambios de precios y renta, permitamos variar simultáneamente a todas las variables. Esto se alcanza diferenciando totalmente las ecuaciones (2-14):

$$\begin{aligned} f_{11}\,dq_1 + f_{12}\,dq_2 - p_1\,d\lambda &= \lambda\,dp_1 \\ f_{21}\,dq_1 + f_{22}\,dq_2 - p_2\,d\lambda &= \lambda\,dp_2 \\ -p_1\,dq_1 - p_2\,dq_2 \qquad\qquad &= -dy + q_1\,dp_1 + q_2\,dp_2 \end{aligned} \qquad (2\text{-}29)$$

Para resolver este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, dq_1, dq_2, y $d\lambda$, los términos de la derecha deben considerarse constantes. La matriz de los coeficientes formada por (2-29) contiene los mismos elementos que el Hessiano orlado (2-15). Llamando $\mathbf{D}$ a este determinante, $\mathbf{D}_{11}$ al cofactor del elemento de la primera fila y primera columna, $\mathbf{D}_{12}$ al cofactor del elemento de la primera fila y segunda columna, etcétera, la solución de (2-29) por la regla de Cramer (ver sección A-1) es:

$$dq_1 = \frac{\lambda\mathbf{D}_{11}\,dp_1 + \lambda\mathbf{D}_{21}\,dp_2 + \mathbf{D}_{31}\,(-dy + q_1\,dp_1 + q_2\,dp_2)}{\mathbf{D}} \qquad (2\text{-}30)$$

$$dq_2 = \frac{\lambda\mathbf{D}_{12}\,dp_1 + \lambda\mathbf{D}_{22}\,dp_2 + \mathbf{D}_{32}\,(-dy + q_1\,dp_1 + q_2\,dp_2)}{\mathbf{D}} \qquad (2\text{-}31)$$

Dividiendo ambos lados de (2-30) por dp_1 y suponiendo que p_2 e y no cambian ($dp_2 = dy = 0$),

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{\mathbf{D}_{11}\lambda}{\mathbf{D}} + q_1 \frac{\mathbf{D}_{31}}{\mathbf{D}} \tag{2-32}$$

La derivada parcial del lado izquierdo de (2-32) es una relación que expresa la variación en las adquisiciones de Q_1 del consumidor con respecto a los cambios de p_1, permaneciendo iguales todo lo demás. *Ceteris paribus*, la variación de las adquisiciones de Q_1 con respecto a variaciones en la renta es

$$\frac{\partial q_1}{\partial y} = - \frac{\mathbf{D}_{31}}{\mathbf{D}} \tag{2-33}$$

Los cambios en los precios de los productos alteran el nivel de satisfacción del consumidor, hasta que se establezca un nuevo equilibrio basado en una curva de indiferencia distinta. Imaginemos ahora que un cambio del precio viene acompañado por un cambio en la renta, compensado de tal modo con el efecto del cambio de precio, que el consumidor permanece en un nivel de satisfacción inalterado. El consumidor, por tanto, permanece en la misma curva de indiferencia. Un descenso en el precio de un producto va acompañado de un correspondiente descenso en su renta tal que $dU = 0$ y por (2-3) $f_1\, dq_1 + f_2\, dq_2 = 0$. Y como $f_1/f_2 = p_1/p_2$, resulta que $p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 = 0$. De aquí que, de la última ecuación de (2-29), $-dy + q_1\, dp_1 + q_2\, dp_2 = 0$, y

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right)_{U = \text{const.}} = \frac{\mathbf{D}_{11}\lambda}{\mathbf{D}} \tag{2-34}$$

La ecuación (2-32) puede escribirse de nuevo como

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right)_{U = \text{const.}} - q_1 \left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right)_{\text{precios} = \text{const.}} \tag{2-35}$$

La ecuación (2-35) es conocida como ecuación de Slutsky.

EFECTO SUSTITUCIÓN Y EFECTO RENTA. — El primer término de la derecha de (2-35) es el efecto sustitución, o la relación según la que el consumidor sustituye Q_1 por otros productos cuando el precio de Q_1 varía y se mueve a lo largo de una determinada curva de indiferencia.[27]

27. Slutsky lo denominó la *variabilidad residual* del artículo en cuestión.

El segundo término de la derecha es el efecto renta que muestra la reacción del consumidor respecto a adquisiciones de Q_2 debido a cambios en su renta, permaneciendo constantes los precios. La suma de los dos términos nos da el efecto total en las compras de Q_1 por parte del consumidor cuando varía p_1. Imaginemos que baja el precio de Q_1. El consumidor puede preferir sustituir Q_2 por Q_1 porque 1.° Q_1 resulta más barato y 2.° el descenso en el precio de Q_1 equivale a un incremento de su renta. El efecto sustitución describe la variación que tendrá lugar en las diferentes adquisiciones del consumidor si el cambio de un precio se compensa por una variación simultánea de la renta que le fuerza a

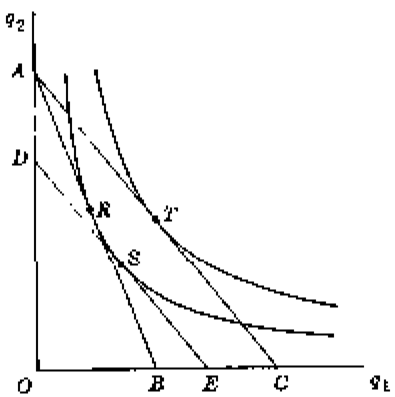


Figura 2-5

permanecer en la misma curva de indiferencia. La discrepancia entre este punto y el final de equilibrio se debe al efecto renta. La figura 2-5 ilustra estos conceptos. La línea original de precios es AB, y el correspondiente punto de equilibrio está en R. Después de la variación de p_1 la línea de precios viene representada por AC, y el punto final de equilibrio está en T. El movimiento de R a T puede descomponerse en dos pasos: de R a S y de S a T. El punto S es el de tangencia entre la curva de indiferencia original y la línea de precios DE que tienen la misma pendiente (y por tanto representa la misma relación de precios) que AC. El movimiento de R a S es debido al efecto sustitución y el de S a T al efecto renta.[28]

28. La figura 2-5 no es una representación exacta de la discusión matemática anterior. La ecuación de Slutsky comprende razones de cambio que no se pueden representar directamente en un gráfico de curvas de indiferencia. En la figura 2-5 la suma de los dos cambios discretos (y no de dos razones) es el cambio discreto total (y no la relación de cambio total). Estos dos cambios discretos *corresponden* (más que son) al efecto sustitución y al efecto renta.

La utilidad extra, ganada al consumir una unidad adicional de cualquier producto, dividida por su precio, es igual a λ. La utilidad ganada con el último dólar gastado, es la utilidad marginal de la renta. Alternativamente la utilidad marginal de la renta puede determinarse de (2-13). Puesto que $\frac{\partial v}{\partial y} = \lambda$, la utilidad marginal de la renta λ, el multiplicador de Lagrange, es positiva. Entonces se puede determinar fácilmente la dirección del efecto sustitución. A partir de (2-34), el efecto sustitución es $\mathbf{D}_{11}\lambda/\mathbf{D}$. Desarrollando el determinante $\mathbf{D}$,

$$\mathbf{D} = 2\, f_{12}\, p_1\, p_2 - p_1^2\, f_{11} - p_2^2\, f_{22}$$

que se sabe que es positivo por (2-10). Desarrollando $\mathbf{D}_{11}$,

$$\mathbf{D}_{11} = - p_2^2$$

que es claramente negativo. Esto prueba que el signo del efecto sustitución es siempre negativo. Si aumenta el precio de Q_1, y la renta de consumidor se ajusta de tal modo que su punto de equilibrio final está en la misma curva de indiferencia, sus adquisiciones de Q_1 disminuirán.

Un cambio de renta real puede causar una redistribución de los recursos del consumidor, aun cuando no cambien los precios o cambien en la misma proporción. El efecto renta es $-q_1\,(\partial q_1/\partial y)_{\text{precios = const.}}$ y puede ser de ambos signos. De modo que se desconoce el efecto final de un cambio del precio en las adquisiciones del artículo. Sin embargo, aún se puede derivar una conclusión importante: cuanto más pequeña sea la cantidad de Q_1, menos significativo es el efecto renta. Si el efecto renta es positivo y su valor absoluto lo suficientemente grande para hacer $\partial q_1/\partial p_1$ positivo, se dice que Q_1 es un bien inferior.[29] Lo que significa que las adquisiciones del consumidor de Q_1, bajarán a medida que baje su precio. Tal cosa puede ocurrir cuando el consumidor es tan pobre que gasta una parte considerable de su renta en un artículo de primera necesidad, como las patatas. Supongamos que disminuye el precio de las patatas. El consumidor que no sea muy aficionado a ellas, puede descubrir de repente, que a consecuencia de su caída del precio, su renta real ha aumentado. Entonces comprará menos patatas, y adquirirá, con el remanente de su renta, una dieta más apetitosa.

29. Puede darse la siguiente definición alternativa de los bienes inferiores: un producto Q_1 es un bien inferior si $\partial q_1/\partial y$ es negativa, p. ej., si las adquisiciones de Q_1 del consumidor decrecen cuando aumenta su renta. Esta es una definición más débil en el sentido de que no implica la del contexto, mientras que aquélla implica ésta.

dad particular. Estas definiciones son imprecisas, pero la experiencia diaria sugiere ejemplos plausibles. Café y té son lo más semejante a sustitutivos, mientras que el café y el azúcar son complementarios. El término de sustitución de las ecuaciones de Slutsky (2-36) y (2-37) proporciona una definición más rigurosa de la sustituibilidad y de la complementariedad. De acuerdo con ello Q_1 y Q_2, son sustitutivos si el efecto sustitución $\mathbf{D}_{21}\lambda/\mathbf{D}$ es positivo, y complementarios si es negativo. Si Q_1 y Q_2 son sustitutivos (en el sentido corriente) y el consumidor se mantiene en la misma curva de indiferencia, gracias a que las variaciones de renta se compensan entre sí, un incremento en el precio de Q_1, inducirá al consumidor a sustituir Q_1 por Q_2. Entonces $\left(\frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right)_{U=\text{const.}} > 0$
En caso de que sean complementarios, y por razones análogas

$$\left(\frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right)_{U\ \text{const.}} < 0.$$ [31]

Todos los artículos no pueden ser complementarios entre sí. De aquí que en el presente caso de dos variables solamente puede existir el fenómeno de la sustituibilidad. Este teorema se prueba fácilmente. Multipliquemos (2-32) por p_1, (2-33) por y, y (2-36) por p_2, y sumemos:

$$\frac{\mathbf{D}_{11}\lambda}{\mathbf{D}} p_1 + q_1 \frac{\mathbf{D}_{31}}{\mathbf{D}} p_1 + \frac{\mathbf{D}_{21}\lambda}{\mathbf{D}} p_2 + q_2 \frac{\mathbf{D}_{31}}{\mathbf{D}} p_2 - \frac{\mathbf{D}_{31}}{\mathbf{D}} y =$$
$$= \frac{1}{\mathbf{D}} [\mathbf{D}_{11}\lambda p_1 + \mathbf{D}_{21}\lambda p_2 - \mathbf{D}_{31}(y - p_1 q_1 - p_2 q_2)] =$$
$$= \frac{1}{\mathbf{D}} [\mathbf{D}_{11}\lambda p_1 + \mathbf{D}_{21}\lambda p_2 - \mathbf{D}_{31}(0)] = 0 \qquad (2\text{-}38)$$

La expresión (2-38) es igual a cero, puesto que es el desarrollo del determinante de (2-31), en términos de los cofactores de los otros elementos, o sea *los cofactores de los elementos de la primera columna* están multiplicados por los elementos de la última. Sustituyendo $\mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_{21}$, y $S_{ij} = \frac{\mathbf{D}_{ij}\lambda}{\mathbf{D}}$

$$S_{11} p_1 + S_{12} p_2 = 0 \qquad (2\text{-}39)$$

31. Esto proporciona una razón para las definiciones. Cuando $\left(\frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right)_{U=\text{const}} = 0$, Q_1 y Q_2 son independientes.

La ecuación (2-39) se cumple para la función de utilidad usada en los ejemplos anteriores. Sustituyendo los valores de **D**, $\mathbf{D}_{11}$, y $\mathbf{D}_{21}$, obtenidos al suponer que la función de utilidad era $U = q_1 q_2$,

$$-\frac{p_1 p_2^2 \lambda}{2 p_1 p_2} + \frac{p_1 p_2^2 \lambda}{2 p_1 p_2} = 0 \tag{2-40}$$

Puesto que el lado izquierdo de (2-40), es igual a cero, se satisface la ecuación (2-39). Pero se sabe que S_{11}, el efecto de sustitución de Q_1 para cambios de p_1, es negativo. De aquí que (2-39) implica que S_{12} debe ser positivo, y en términos de las definiciones de complementariedad y sustituibilidad, esto significa que Q_1 y Q_2 son necesariamente sustitutivos.

2-7. Generalización a *n* variables

El análisis precedente de la conducta del consumidor, se generaliza ahora al caso de n artículos. La generalización no se lleva a cabo en detalle, sino que sólo se indican los rasgos generales. Si hay n artículos, la función de utilidad es:

$$U = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \tag{2-41}$$

y la ecuación de balance viene dada por

$$y - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = 0 \tag{2-42}$$

Formando como anteriormente la función

$$V = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) + \lambda \left(y - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \right) \tag{2-43}$$

e igualando a cero las derivadas parciales

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = f_i - \lambda p_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2-44}$$

Las condiciones (2-44), pueden modificarse de modo que establezcan la igualdad de las razones entre la utilidad marginal y el precio de cada artículo. De nuevo la derivada parcial de V respecto a λ es la ecuación de balance. Hay un total de $(n + 1)$ ecuaciones con $(n + 1)$ variables

(n bienes y λ). Las curvas de demanda de los n bienes, pueden obtenerse hallando las q. Las condiciones (2-44), pueden escribirse igualmente:

$$-\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \frac{p_j}{p_i} \tag{2-45}$$

para cualquier i y j; o sea, la relación de sustitución entre los bienes i y j, debe ser igual a la razón de precios p_j / p_i. Para estar seguro de que un lote de bienes que satisface (2-44) es óptimo, deben cumplirse las condiciones de segundo grado. Los Hessianos orlados, deben cambiar de signo.

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & -p_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & -p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & 0 \end{vmatrix} < 0, \ldots .$$

$$\ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \cdots f_{1n} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \cdots f_{2n} & -p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} \cdots f_{nn} & -p_n \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 \cdots -p_n & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Otros teoremas pueden generalizarse también de manera directa. Por ejemplo, la ecuación de Slutsky se convierte en

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\right)_{U=\text{const.}} - q_j \left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)_{\text{precios = const.}} \tag{2-46}$$

La generalización de (2-39), es

$$\sum_{j=1}^{n} S_{ij}\, p_j = 0 \tag{2-47}$$

Se sigue deduciendo que todos los productos no pueden ser complementarios entre sí.

2-8. La teoría de la preferencia revelada

En las secciones previas se había supuesto que el consumidor poseía una función de utilidad. Si su conducta se adapta a ciertos axiomas sencillos, de sus acciones se puede deducir la naturaleza y existencia de su mapa de indiferencia.

Supongamos que hay n artículos. Llamemos $[p^0]$, a un serie concreta de precios $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$, y $[q^0]$ a las correspondientes cantidades compradas por el consumidor. Los gastos totales del consumidor vienen dados por $\sum p^0 q^0$.

Consideremos un lote alternativo de artículo $[q^1]$, que el consumidor pudo haber comprado, pero no lo hizo. El coste total del lote $[q^1]$ a los precios $[p^0]$, no debe ser mayor que el coste total del lote $[q^0]$, es decir, que:

$$\Sigma p^0 q^1 \leqq \Sigma p^0 q^0 \tag{2-48}$$

Entonces, como $[q^0]$ es una combinación de artículos tan cara al menos como $[q^1]$, y el consumidor rehusó escoger la combinación $[q^1]$, se "revela" que el consumidor prefiere $[q^0]$ a $[q^1]$.

AXIOMA 1. — Si se revela que se prefiere $[q^0]$ a $[q^1]$, no debe revelarse nunca que esta última combinación se prefiera alguna vez a la $[q^0]$.

De la única forma que se puede revelar que $[q^1]$ se prefiere a $[q^0]$ es que el consumidor efectúe la compra de la combinación $[q^1]$ en una situación de precios tal, que le permita también la adquisición de $[q^0]$. En otras palabras: se revela que se prefiere $[q^1]$ si

$$\Sigma p^1 q^0 \leqq \Sigma p^1 q^1 \tag{2-49}$$

El axioma establece, que no puede satisfacerse (2-49) si lo hace (2-48). Consecuentemente, (2-48) implica lo opuesto a (2-49)

$$\Sigma p^0 q^1 \leqq \Sigma p^0 q^0 \qquad \text{implica} \qquad \Sigma p^1 q^0 > \Sigma p^1 q^1 \tag{2-50}$$

AXIOMA 2. — Si se revela que se prefiere $[q^0]$ a $[q^1]$, el que a su vez se revela que se prefiere a $[q^2]$, ..., el que se revela que se prefiere a $[q^n]$, nunca debe revelarse que $[q^n]$ se prefiere a $[q^0]$.[32] Este axioma asegura la transitividad de las preferencias reveladas, pero es más fuerte que la condición habitual de transitividad.

Al principio de este capítulo se desechó el tratamiento cardinal de la teoría de la utilidad, basándose en que no hay razón para suponer que el consumidor posea una medida cardinal de la utilidad. Paralelamente, se podría preguntar si posee siquiera un mapa de indiferencia. Afortunadamente, se puede probar que un consumidor que se atiene siempre a los anteriores axiomas, debe poseer un mapa de indiferencia. Se podría reconstruir su mapa de indiferencia, con un alto grado de exactitud (el

32 Los dos axiomas pueden refundirse en uno solo, pero se han mantenido separados en aras de la claridad

mapa de indiferencia "auténtico", podría aproximarse tanto como se quisiera), enfrentándole con varias series de precios, escogidos adecuadamente, y observando sus adquisiciones.[33] Si el consumidor no se atiene a los axiomas, es irracional en el sentido de la definición de las primeras secciones. Si es irracional y actúa de forma inconsistente, no posee un mapa de indiferencia, y de la observación de su conducta, no puede deducirse la forma de su función de utilidad.

El efecto sustitución. — Con base en la teoría de la preferencia revelada, se puede probar que el efecto sustitución es negativo.[34] Supongamos que el consumidor está constreñido a moverse a lo largo de una curva de indiferencia dada. Cuando los precios vienen dados por $[p^0]$, adquiere el lote $[q^0]$, con preferencia al $[q^1]$, que está en la misma hipersuperficie de indiferencia. Desde el momento en que está indeciso entre q^0 y q^1 y, con todo, adquiere q^0, la última combinación debe ser más cara que la primera:

$$\Sigma p^0 q^0 \leqq \Sigma p^0 q^1 \qquad (2\text{-}51)$$

La combinación $[q^1]$, se compra a los precios $[p^1]$. Esto implica que, a los precios $[p^1]$, la combinación $[q^0]$ no debe ser más barata que la $[q^1]$:

$$\Sigma p^1 q^1 \leqq \Sigma p^1 q^0 \qquad (2\text{-}52)$$

Trasladando a la izquierda los segundos términos de (2-51) y (2-52),

$$\Sigma p^0 q^0 - \Sigma p^0 q^1 = \Sigma p^0 (q^0 - q^1) = \Sigma (-p^0)(q^1 - q^0) \leqq 0 \qquad (2\text{-}53)$$

$$\Sigma p^1 q^1 - \Sigma p^1 q^0 = \Sigma p^1 (q^1 - q^0) \leqq 0 \qquad (2\text{-}54)$$

Sumando (2-53) y (2-54),

$$\Sigma (-p^0)(q^1 - q^0) + \Sigma p^1 (q^1 - q^0) = \Sigma (p^1 - p^0)(q^1 - q^0) \leqq 0 \qquad (2\text{-}55)$$

Esta desigualdad asegura que si el consumidor se mueve a lo largo de una curva de indiferencia dada, la suma de los cambios en todas las cantidades multiplicada por los correspondientes cambios de precios,

33. La prueba de este teorema es algo difícil y no se ha reproducido aquí. Véase H. S. Houthakker, "Revealed Preference and the Utility Function" *Economica*, n. s., vol. 17 (mayo, 1960), pp. 159-174.

34. Este es solamente uno de los varios teoremas que se pueden deducir de la teoría. Otros son: 1.° La homogeneidad de grado cero en precios y renta de las funciones de demanda (sección 2-4), y 2.° La igualdad de los efectos de sustitución cruzados (sección 2-6). Véase P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948), pp. 111-112; y J. R. Hicks, *A revision of Demand Theory* (Oxford: Clarendon Press, 1956), p. 127.

no es positiva. Supongamos ahora que sólo cambia el precio del primer artículo, permaneciendo constantes los demás. Entonces (2-55) se reduce a

$$(p_1^1 - p_1^0)\,(q_1^1 - q_1^0) < 0 \tag{2-56}$$

Bajo el supuesto de que el cambio de precios no es nulo, y que q_1^1 y q_1^0 son diferentes, la estricta desigualdad de (2-56) debe mantenerse, o sea, la demanda es una función unívoca del precio. Si el precio aumenta, la cantidad comprada debe disminuir, y viceversa. Esto prueba de nuevo, que el efecto sustitución es negativo.

2-9. El problema de la elección en situaciones de riesgo

La teoría tradicional de la conducta del consumidor no incluye el análisis en situaciones inciertas. Von Neumann y Morgenstern pusieron de manifiesto que bajo ciertas circunstancias es posible construir, para un consumidor particular, una serie de números que predigan sus elecciones en situaciones inciertas. Existe abundante controversia acerca de si el índice de utilidad resultante es ordinal o cardinal. Se demostrará que las utilidades de von Neumann-Morgenstern poseen por lo menos algunas propiedades cardinales.

El análisis previo es irreal en el sentido de que supone que las acciones del consumidor vienen seguidas de determinadas consecuencias, que son cognoscibles por adelantado. No siempre todos los automóviles del mismo modelo producidos en la misma fábrica tienen igual rendimiento. De hecho, como resultado de accidentes casuales en el proceso de producción se producen y venden algunos automóviles substandards. El consumidor no tiene medio alguno de conocer con anterioridad si el automóvil concreto que él adquiere tiene o no la calidad standard. Representemos por A la situación en que el consumidor posee un automóvil satisfactorio. Por B, una situación en la que no posee automóvil, y por C, una en la que posee un automóvil substandard. Supongamos que el consumidor prefiere A a B, y B a C.[26] Enfrentémosle con una elección entre dos alternativas: 1.º Puede mantener el *status quo* y no tener coche. Esta es una elección con resultado cierto, o sea, la probabilidad del resultado es igual a la unidad. 2.º Puede obtener un billete de lotería, con la posibilidad de ganar un automóvil satisfactorio (alternativa A),

26 Se supone que es preferible no tener automóvil a tener uno sub-standard, a causa de las molestias y gastos anejos a su manutención.

o uno insatisfactorio (alternativa C). El consumidor puede preferir retener su renta (o dinero) con certeza, o puede preferir el billete de lotería de resultado dudoso, o puede sentirse indiferente ante ambas alternativas. *Su decisión dependerá de las probabilidades de ganar o de perder en la lotería concreta.* Si la probabilidad de una pérdida es muy grande, puede preferir retener su renta con certeza; si es muy pequeña, puede preferir el billete de lotería.

Los axiomas. — Si el consumidor se conforma según los cinco axiomas siguientes, se puede confeccionar un índice de utilidad ordinal, capaz de predecir la elección en situaciones inciertas:

Axioma del orden completo. — Dadas las dos alternativas A y B, se debe cumplir necesariamente que el consumidor prefiera A a B, B a A, o esté indeciso entre ellas. La valoración de las alternativas por parte del consumidor, es transitiva: si prefiere A a B y B a C, prefiere A a C.

Axioma de la continuidad. — Supongamos que se prefiere A a B y B a C. El axioma afirma que existe una probabilidad P, $0 < P < 1$, tal, que al consumidor le es indiferente el resultado cierto B o un billete de lotería ofreciendo los resultados A y C, con probabilidades P y $1 - P$, respectivamente.

Axioma de la independencia. — Supongamos que el consumidor está indeciso entre A y B, y que C es un resultado cualquiera. Si un billete de lotería ofrece los resultados A y C, con probabilidades P y $1-P$, el consumidor estará indeciso entre los dos billetes de lotería.

Axioma de la probabilidad desigual. — Supongamos que el consumidor prefiere A a B. *Si dos billetes de lotería L_1 y L_2 ofrecen ambos los* mismos resultados A y B, el consumidor preferirá el billete de lotería L_2, si, y sólo si, la probabilidad de ganar A es mayor en L_2 que en L_1.

Axioma de la complejidad. — Supongamos que una persona interviene en el siguiente juego de azar: tira un dado, y si sale 1 o 2, su oponente le paga 9 dólares; en cualquier otro caso, él le paga 3 dólares. La probabilidad de ganar es un tercio, y la de perder, dos tercios. El jugador puede esperar ganar, en promedio,

$$(1/3)(9) + (2/3)(-3) = 1 \text{ dólar por juego}$$

Si A y B son los valores monetarios de dos resultados con probabilidades P y $1 - P$, la esperanza matemática del juego, o la ganancia esperada, es $PA + (1 - P)B$. Supongamos ahora que se ofrece al consumidor una elección entre dos billetes de lotería. El primero, L_1, ofrece los resultados A y B, con probabilidades dadas. El otro, L_2, es complejo. En el sentido de que los mismos premios son billetes de lotería: si el consumidor escoge L_2 y gana, obtiene un billete de lotería L_3 (ofreciendo A y B con probabilidades dadas). Si pierde, se le da otro billete de lotería L_4 (ofreciendo también A y B con probabilidades dadas). Supongamos, finalmente, que las probabilidades de ganar con cada billete son tales, que la esperanza de ganancia del consumidor (tal como se ha definido antes), es la misma, tanto si escoge L_1 como L_2. El axioma garantiza que en este caso el consumidor estará indeciso entre L_1 y L_2.

Estos axiomas son muy generales y puede resultar difícil el objetarlos aduciendo que establecen restricciones desmesuradas a la conducta del consumidor. Sin embargo, desestiman algunos tipos plausibles de conducta. Consideremos una persona que obtiene satisfacción del mero acto de jugar. Para tal persona, es concebible que no exista otra P, que $P = 1$, o $P = 0$, de modo que esté indeciso entre el resultado B con certeza, y el proyecto incierto consistente en A y C: él preferirá siempre el juego. Si tiene miedo al juego, preferirá siempre la "cosa segura", al proyecto dudoso. Los axiomas de la continuidad y de la complejidad, excluyen este tipo de conducta.

Construcción de los números de utilidad. — Imaginemos que el consumidor obtiene la satisfacción U_A del resultado A, y U_C del resultado C. Dado que estos resultados tienen las probabilidades P y $1 - P$, la utilidad esperada por el consumidor es $PU_A - (1 - P)\ U_C$. Puede probarse que un consumidor que se adapte a los axiomas, maximizará la utilidad esperada. Si se enfrenta con una serie de proyectos inciertos (o sea, si tiene que decidir qué billete de lotería selecciona), escogerá el de la utilidad esperada más alta. Los proyectos del consumidor pueden ordenarse en orden decreciente de utilidad o deseabilidad esperadas. En el caso especial en que un proyecto tiene un resultado cierto (y no incierto o dudoso), la utilidad esperada del proyecto es igual al número de utilidad asociado con el (único) resultado. Así, los números de utilidad asociados con varios resultados, son un índice de utilidad ordinal y proporcionan una ordenación correcta.

Consideremos el ejemplo anterior en el que los gastos A, B y C, representaban la posesión de un automóvil satisfactorio, la no posesión de un automóvil, o la posesión de uno substandard. El consumidor prefiere A a B y B a C. Para obtener un índice de utilidad, se debe escoger un origen y una unidad, objetivo que se alcanza asignando números para representar las utilidades de cada dos resultados. Estos números son completamente arbitrarios, excepto en que debe asignarse un número más alto al resultado preferido. Así, puede usarse el índice de utilidad

$U_A = 100$, y $U_C = 10$, porque se prefiere A a C. El axioma de la continuidad asegura que existe alguna probabilidad para la que el consumidor está indeciso entre B y una oportunidad entre A y C. Puesto que el consumidor maximiza la utilidad esperada, la utilidad del resultado cierto B debe igualarse, para algún valor de P, a la esperada del proyecto (o billete de lotería), que comprende A y B, es decir:

$$U_B = PU_A + (1 - P)\ U_C \tag{2-57}$$

No es imposible preguntar al consumidor que fijase el valor de P para el que estaría indeciso entre un B cierto y una oportunidad entre A y C. Supongamos que este valor de P es $P = 0{,}1$. Entonces

$$U_B = (0{,}1)\ (100) + (0{,}9)\ (10) = 19 \tag{2-58}$$

Procediendo de este modo, se pueden encontrar números de utilidad U_A, U_B, U_C, U_D, ..., para todas las posibles cantidades y combinaciones de todos los artículos; de aquí que se pueda obtener un índice de utilidad completo, tomando dos puntos de partida arbitrarios, y enfrentando sucesivamente al consumidor con varias situaciones de elección comportando probabilidades o riesgo. Por ejemplo, si el consumidor está indeciso entre un automóvil satisfactorio, con certeza, y una oportunidad 0,8 de un yate (resultado D), o una oportunidad 0,2 un coche standard, la aplicación de la técnica anterior da 122,5 como utilidad del yate. La elección del consumidor entre alternativas más complicadas puede predecirse sobre la base de estos índices de utilidad. El consumidor racional preferiría una oportunidad de 40/60 por B y D, a una 50/50 de A y C, puesto que

$$(0{,}5)\ (100) + (0{,}5)\ (10) < (0{,}4)\ (122{,}5) + (0{,}6)\ (19)$$

La unicidad del índice de utilidad. — Imaginemos que se han encontrado para un consumidor individual una serie de números de utilidad que satisfacen los anteriores axiomas. Se ha demostrado ya que las funciones ordinales de utilidad son únicas, excepto para transformaciones monótonas. Los resultados obtenidos del presente índice de utilidad (cardinal), pueden cambiar si se efectúa una transformación monótona. Vamos a ilustrarlo con referencia al ejemplo usado anteriormente. Como antes,

$$\begin{array}{llll} U_A & 100 & U_B = 19 \\ U_C & 10 & U_D = 122{,}5 \end{array}$$

El consumidor preferirá una oportunidad de 40/60 de D y B, a una

50/50 de A y C. Efectuemos una transformación monótona de estos números, de modo que se conviertan en [36]

$$U_A = 120 \qquad U_B = 20$$
$$U_C = 18 \qquad U_D = 125$$

El consumidor preferirá ahora la oportunidad 50/50, de A y C. No sigue siendo válido que cualquier transformación monótona de un índice de utilidad, en el sentido que se le da ahora, puede servir también como índice de utilidad. Sin embargo, las transformaciones lineales monótonas de las funciones de utilidad, son también funciones de utilidad. [37] $U_B = PU_A + (1 - P)U_C$, para algún P. Transformemos la función de utilidad de forma que $U^* = aU + b$, $a > 0$. Entonces $U = (U^* - b)/a$ o $U = cU^* + d$ (dónde $c = 1/a$ y $d = -b/a$), y

$$cU_B^* + d = P\,(cU_A^* + d) + (1 - P)\,(cU_C^* + d)$$
$$= PcU_A^* + (1 - P)\,cU_C^* + d$$

y, de aquí: $\quad cU_B^* = PcU_A^* + c\,(1 - P)\,U_C^*$
y, por tanto: $\quad U_B^* = PU_A^* + (1 - P)\,U_C^*$

Esto prueba que una transformación lineal monótona de la función de utilidad original es en sí misma otra función de utilidad que da los mismos resultados.

En el análisis de von Neuman-Morgenstern, las utilidades son cardinales en un sentido restringido. Se derivan de la conducta del consumidor en situaciones de riesgo y son válidas para predecir sus elecciones siempre que maximice la utilidad esperada. Se obtienen presentándole elecciones mutuamente excluyentes; por esta razón no tiene sentido intentar inferir de la utilidad del suceso A, y de la del suceso B, la utilidad del suceso conjunto A y B. Las utilidades de von Neumann-Morgenstern, poseen algunas propiedades de las medidas cardinales, pero no todas. Sean las utilidades de tres alternativas $U_A = 10$, $U_B = 30$, y $U_C = 70$. No tiene sentido afirmar que el consumidor prefiere C "siete veces más" que A, puesto que la elección del origen es arbitraria; igualmente se podrían indicar estas preferencias por $U_A = 1$, $U_B = 21$ y $U_C = 61$. Los números de utilidad difieren de las medidas de peso, distancia o volumen. Puede afirmarse con propiedad, que un objeto pesa siete veces más que otro Sin embargo, las diferencias entre los números de utilidad, sí tienen sentido. Así se sigue del hecho de

36. No se indica la forma exacta de la transformación. El lector puede comprobar que la transformación es monótona.
37. Y es una transformación lineal monótona de X si $Y = aX + b$ y $a > 0$.

que las magnitudes relativas de las diferencias entre los números de utilidad son invariantes respecto a transformaciones lineales. En el ejemplo anterior

$$U_C - U_B > U_B - U_A$$

Escojamos una transformación lineal

$$U = cU^* + d, \; c > 0,$$

y sustituyamos en la desigualdad anterior:

$$cU_C^* + d - cU_B^* - d > cU_B^* + d - cU_A^* - d$$

y

$$U_C^* - U_B^* > U_B^* - U_A^*$$

En contraste con la teoría tradicional del consumidor, el signo del tipo de cambio de la utilidad marginal (la segunda derivada de la función de utilidad), es ahora relevante, puesto que es invariable respecto a transformaciones lineales. Sin embargo, tales comparaciones no implican que el consumidor prefiera C sobre B a B sobre A, puesto que la alternativa escogida debe tener el número de utilidad más alto.

Las comparaciones interpersonales de utilidad, son aún imposibles. Sin embargo, la construcción de las utilidades de von Neumann-Morgenstern, permite: 1.º la ordenación completa de alternativas en situaciones caracterizadas por la certeza; 2.º la comparación de las diferencias de utilidad en virtud de la propiedad cardinal expuesta, y 3.º el cálculo de las utilidades esperadas, haciendo así posible el tratar la conducta del consumidor, bajo condiciones de incertidumbre.

2-10. Resumen

Los economistas teóricos del siglo XIX explican la conducta del consumidor bajo el supuesto de que la utilidad es medible. Este supuesto restrictivo se abandonó al final del siglo, y a partir de entonces solamente se supuso al consumidor capaz de ordenar consistentemente las combinaciones de artículos en orden de preferencia. Esta ordenación se describe matemáticamente, mediante la función de utilidad ordinal del consumidor, que asigna siempre un número superior a la combinación de productos más deseable. El postulado básico de la teoría de la conducta del consumidor es que éste maximiza la utilidad. Y como su renta es limitada, maximiza la función de utilidad condicionada a la ecuación de balance, que expresa en forma matemática la limitación que le impone su renta. Para un máximo, la razón de las utilidades marginales, debe igualarse a la razón de los precios. En un gráfico, la combinación óptima de artículos, viene dada por el punto en que la línea de precios es tangente a una curva de indiferencia. La condición de segundo grado de un máximo, requiere que las curvas de indiferencia sean convexas hacia abajo.

La función de utilidad del consumidor no es única. Si una función concreta indica aproximadamente las preferencias de consumidor, también lo hace cualquier otra que sea transformación monótona suya.

Las otras clases de transformaciones no conservan el orden correcto, y, por tanto, la función de utilidad es única hasta transformaciones monótonas inclusive.

La curva de demanda de un artículo por el consumidor, puede obtenerse de las condiciones de primer grado para la maximización de su utilidad. Una curva de demanda establece la cantidad demandada en función de todos los precios y de la renta del consumidor. Las curvas de demanda son unívocas y homogéneas de grado cero en precios y renta: un cambio proporcional en todos los precios y en la renta del consumidor, deja inalterada la cantidad demandada.

En general, la cantidad de trabajo realizado por un consumidor, afecta a su nivel de utilidad. La magnitud de su trabajo puede determinarse siguiendo el criterio de la decisión racional de maximización de la utilidad. Las condiciones de equilibrio son parecidas a las que rigen la selección de una combinación óptima de artículos.

La reacción del consumidor ante cambios de los precios y renta se puede analizar en términos de los efectos sustitución y renta. El efecto de un cambio dado de un precio se puede descomponer analíticamente en un efecto de sustitución, que mide la razón a la que sustituiría unos artículos por otros, moviéndose a lo largo de la misma curva de indiferencia, y un efecto renta, como categoría residual. Si cambia el precio de un artículo, y el consumidor está forzado a moverse a lo largo de la misma curva de indiferencia, la cantidad demandada cambia en sentido opuesto: el efecto sustitución es negativo. Si el efecto renta es positivo, y excede en valor absoluto al efecto sustitución, el artículo es un bien inferior. Los bienes sustitutivos y complementarios, se definen por razón del signo del efecto sustitución de un artículo cuando cambia el precio de otro: un efecto sustitución cruzado positivo, significa sustituibilidad, y uno negativo, complementariedad.

La teoría se puede generalizar a un número arbitrario de bienes. Se puede también exponer en términos de la teoría de la preferencia revelada, que no usa el cálculo diferencial, y llega esencialmente a las mismas *conclusiones que el análisis precedente. Los resultados se obtienen en-*

frentando el consumidor con situaciones de precio-renta hipotéticas, y observando sus elecciones. Si su conducta satisface los axiomas fundamentales de la preferencia revelada, se pueden obtener sus curvas de indiferencia y predecir sus elecciones futuras, sobre la base de sus elecciones pasadas.

El enfoque de von Neumann y Morgenstern se centra en la conducta del consumidor en situaciones caracterizadas por la incertidumbre. Si la conducta del consumidor satisface ciertos axiomas cruciales, se puede obtener su función de utilidad enfrentándole con una serie de elecciones entre un gasto cierto de un lado y una combinación probabilística de dos gastos inciertos de otro. La función de utilidad así obtenida es única, incluyendo transformaciones lineales, y proporciona un orden de alternativas en situaciones que no envuelven riesgo. Los consumidores maximizan la utilidad esperada, y las utilidades de von Neumann-Morgenstern, son cardinales en el sentido de que pueden combinarse para calcular las utilidades esperadas, y usarse para comparar diferencias de utilidad.

El cómputo de la utilidad esperada puede utilizarse para determinar las elecciones del consumidor en situaciones que comporten riesgo.

SELECCIÓN DE CITAS

ALCHIAN, A. A., *The meaning of Utility Measurement*, "American Economic Review", vol. 43 (marzo 1953), pp. 26-50. Un estudio no matemático del índice de utilidad de von Neumann-Morgenstern.

ELLSBERG, D., *Classic and current Notions of Measurable Utility*, "Economic Journal", vol. 64 (septiembre 1954), pp. 528-556. Una comparación del concepto decimonónico de la utilidad, medible con el índice de von Neumann-Morgenstern. No matemático.

FRIEDMAN, M. y L. J. SAVAGE, *The Utility Analysis of Choices Involving Risk*, "Journal of Political Economy", vol. 56 (agosto 1948), pp. 279-304. Editado también por la American Economic Association, "Readings in Price Theory" (Homewood, Ill.: Irwin 1952), págs. 57-96. Un análisis de las situaciones de resultados inciertos, que conduce a una hipótesis que expresa la utilidad en función de la renta. Matemáticas sencillas.

GEORGESCU-ROEGEN, N., *The Pure Theory of Consumer Behavior*, "Quarterly Journal of Economics", vol. 50 (agosto 1936, pp. 545-593. Un análisis matemático de la teoría de la utilidad ordinal.

HICKS, J. R., *A Revision of Demand Theory* (Oxford: Clarendon Press, 1956). Un estudio de la teoría del consumidor basada en la teoría de la preferencia revelada y empleando pocas matemáticas. (Trad. del castellano: Fondo de Cultura Económica, Méjico.)

—, *Value and Capital*. (2.ª ed., Oxford: Clarendon Press, 1946). Los capítulos I-III contienen una exposición de la teoría ordinal de la utilidad. El análisis matemático está en un apéndice. (Trad. al castellano: Fondo de Cultura Económica, Méjico.)

HOUTHAKKER, H. S., *Revealed Preference and the Utility Function*, "Economica", n.s., vol. 17 (mayo 1950), pp. 159-174. Contiene una prueba de la existencia de curvas de indiferencia para consumidores que satisfagan los axiomas de la teoría de la preferencia revelada.

MARSCHAK, J., *Rational Behavior, Uncertain Prospects and Measurable Utility*, "Econometrica", vol. 18 (abril 1950), pp. 111-141. Un desarrollo más avanzado del acercamiento de von Neumann-Morgenstern. Matemáticas moderadamente difíciles.

MARSHALL, ALFRED, *Principles of Economics* (8.ª ed., Londres: Macmillan, 1920). Los capítulos I-IV, libro III, contienen una discusión no matemática de los deseos, la utilidad, la utilidad marginal y la demanda desde el punto de vista cardinalista. (Trad. al castellano: Aguilar, Madrid.)

NEUMANN, J. VON, y O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior* (2.ª ed., Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1947). El capítulo I y el apéndice contienen el acercamiento de von Neumann-Morgenstern en su forma original.

SAMUELSON, PAUL A., *Consumption Theory in Terms of Revealed Preference*, "Económica", n.s., vol. 15 (noviembre 1948), pp. 243-253. Demuestra que la teoría de la preferencia revelada puede conducir a la determinación de curvas de indiferencia.

—, *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). Los capítulos V y VII contienen un extenso análisis de la teoría de la utilidad en forma matemática elevada. (Trad. al castellano: El Ateneo, Buenos Aires.)

SLUTSKY, E. E., *On the Theory of the Budget of the Consumer*, "Giornale degli economisti", vol. 51 (julio, 1915), pp. 1-26. Editado también por la American Economic Association, "Readings in Price Theory (Homewood, Ill.: Irwin, 1952), pp. 27-56. El artículo sobre el que se basa la teoría matemática moderna de la conducta del consumidor.

Capítulo 3

LA TEORÍA DE LA EMPRESA

La empresa es una unidad técnica que produce artículos. El empresario (propietario y gerente), decide cómo y cuánto producirá de cada artículo, y obtiene el beneficio o la pérdida que resulta de su decisión. El empresario transforma inputs en outputs, sujeto a reglas técnicas especificadas por su función de producción. La diferencia entre sus ingresos por la venta de outputs y el coste de sus inputs, es su beneficio *si es positiva, o su pérdida, si negativa.*

La función de producción del empresario, expresa matemáticamente la relación entre la cantidad de inputs que emplea y la de outputs que produce. El concepto es perfectamente general. Una función de producción específica puede venir dada por un solo punto, una sola función, continua o discontinua, o un sistema de ecuaciones. Las primeras seis secciones de este capítulo se limitan a funciones de producción dadas por una sola función continua con derivadas parciales de primero y segundo grado también continuas.

El análisis se desarrolla, en primer lugar, para el caso, relativamente simple, en el que se combinan dos inputs para la producción de un solo output, y posteriormente, se generaliza a casos más complicados. La sección séptima se dedica al caso en el que la función de producción viene dada por un sistema de ecuaciones lineales.

Un input es cualquier bien o servicio que contribuye a la producción de un output. Generalmente, el empresario utilizará un gran número de inputs diferentes para la producción de un solo output. Habitualmente, alguno de sus inputs, los secundarios, son outputs de otras empresas. Por ejemplo: el acero es un input para una empresa de automóviles y un output para un productor de acero. Otros inputs, los primarios, tales como el trabajo, la tierra y los recursos minerales, no han sido producidos por nadie. Para un período de producción dado, los inputs se clasifican en fijos o variables. Los inputs fijos son necesarios para la producción, pero su cantidad es invariante respecto a la cantidad producida de output. El coste del input fijo en que incurre el empresario, no está condicionado por su decisión de maximización a corto plazo. Por el contrario, la cantidad necesaria de un input variable, depende de la producida de output. La distinción entre inputs fijos y variables, es temporal; inputs que son fijos para un período de tiempo, son variables para un período más largo.

El empresario de un taller de máquinas suele precisar un período de tres meses para comprar maquinaria nueva o deshacerse de la existente. Por consiguiente, en el planeamiento de la producción para un período de un mes, considerará a la maquinaria como un input fijo, y como variable en el planeamiento de la producción para un período de un año. Todos los inputs son variables si se considera un período de tiempo lo suficientemente largo.

El análisis formal de la empresa es, en ciertos aspectos, similar al análisis formal del consumidor. El consumidor adquiere artículos con los que "produce" satisfacción; el empresario adquiere inputs con los que produce artículos: el consumidor posee una función de utilidad; la empresa, una función de producción. La ecuación de balance del consumidor es función lineal de las cantidades de artículos que compra. La ecuación de coste de la empresa competitiva es función lineal de las cantidades de inputs que adquiere. El postulado de la maximización del beneficio tiene también una contrapartida en la teoría de la empresa. El consumidor racional desea maximizar la utilidad que adquiere del consumo de artículos; el empresario racional desea maximizar el beneficio que obtiene de la producción y venta de artículos.

Las diferencias entre los análisis del consumidor y de la empresa no son tan obvias como sus semejanzas. La función de utilidad es subjetiva, y la utilidad no tiene una medición cardinal concreta: la función de producción es objetiva, y el output de una empresa es fácilmente medible. Una sola empresa puede producir más de un output. El proceso de maximización del empresario va usualmente un paso más allá que el del consumidor. El consumidor racional maximiza su utilidad para una renta dada. La acción análoga del empresario es maximizar la cantidad de su output para un nivel de coste dado, pero, generalmente, su coste es variable, y lo que él desea es maximizar su beneficio.

En las dos primeras secciones de este capítulo se discuten los problemas de un empresario que utiliza dos inputs para la producción de un output. En la primera se analiza la naturaleza de la función de producción, y la obtención de curvas de productividad e isocuantas, y en la segunda, las alternativas conductas de optimización. En la sección 3-3 se derivan las funciones de coste, a partir de las funciones de producción.

En la 3-4 se estudia la función de rendimientos constantes y el caso especial de funciones de producción homogéneas. Los problemas de un empresario que utiliza un solo input en la producción de dos outputs se analizan en la sección 3-5, y en la 3-6, se generaliza el análisis a un número arbitrario de inputs y outputs. En la sección 3-7, finalmente, se estudia el problema de la optimización del empresario, bajo el enfoque de la programación lineal.

3-1. Conceptos básicos.

La función de producción. — Consideremos un proceso de producción simple, en el que el empresario utiliza dos inputs variables (X_1 y X_2), y uno o más inputs fijos, para producir un solo output (Q). La función de producción del empresario establece la cantidad de output (q), en función de las cantidades de los inputs variables (x_1 y x_2):

$$q = f(x_1, x_2) \tag{3-1}$$

donde (3-1) se supone que es una función continua, unívoca, con derivadas parciales de primero y segundo grado, continuas. La función de producción únicamente se define para valores no negativos de los niveles de inputs y outputs.

Los valores negativos no tienen sentido en el presente contexto. La función de producción está construida bajo el supuesto de que las cantidades de inputs fijos tienen niveles predeterminados, que el empresario es incapaz de alterar durante el período de tiempo considerado.

Para la producción de un nivel dado de output el empresario puede utilizar varias combinaciones diferentes de X_1 y X_2. De hecho, como (3-1) es continua, el número de combinaciones posibles es infinito. La tecnología del empresario es todo caudal de información técnica sobre combinación de inputs, necesaria para la producción de su output. Incluye todas las posibilidades físicas. Puede indicar que una sola combinación de X_1 y X_2 sea susceptible de aplicarse en formas diversas, y, por tanto, dar lugar a diferentes niveles de outputs. La función de producción difiere de la tecnología en que presupone la eficiencia técnica, y establece el *máximo* output obtenible de cada posible combinación de inputs. La mejor utilización de cada combinación de inputs, es un problema técnico, no económico. La selección de la mejor combinación de inputs, para la producción de un nivel de output concreto, depende de los precios de inputs y outputs y es el objeto del análisis económico.

Los niveles de inputs y outputs son índices de su flujo por unidad de tiempo. El período de tiempo para el que se definen estos flujos, y por tanto, la función de producción a corto plazo, está sujeto a tres restricciones generales: debe ser 1) suficientemente corto para que el empresario sea incapaz de alterar los niveles de sus inputs fijos, 2) suficientemente corto para que no se altere la forma de la función de producción debido a mejoras tecnológicas, y 3) suficientemente largo para permitir que se acaben los procesos técnicos necesarios. La elección de un *período de tiempo particular dentro de los límites fijados, es arbitraria.* El análisis puede transformarse en uno a largo plazo, relajando la prime-

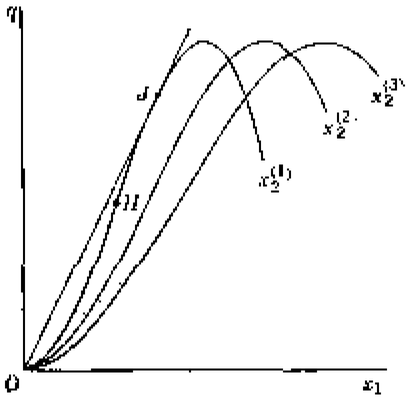


FIGURA 3-1

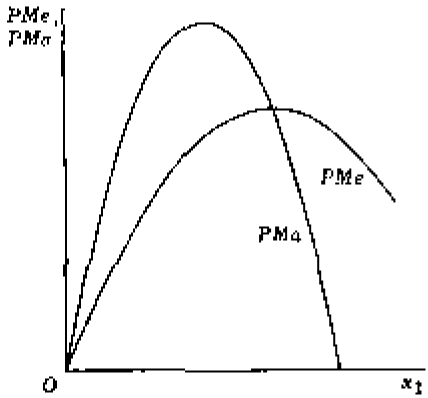


FIGURA 3-2

ra condición, y definiendo la función de producción para un período lo suficientemente largo para que permita la variación de los inputs fijos antes mencionados. La diferencia principal entre un análisis a corto plazo y uno a largo, es el número de inputs variables. Casi todos los resultados para el período a corto plazo, son válidos, con ligeras modificaciones, para el período a largo plazo.

CURVAS DE PRODUCTIVIDAD. — La productividad total de X_1 en la producción de Q, se define como la cantidad de Q que puede obtenerse del input X_1, si se asigna el valor fijo, x_2^0, a X_2:

$$q = f(x_1, x_2^0) \tag{3-2}$$

El nivel de input x_2^0 se considera como parámetro, y q se convierte en *función de x_1 solamente.* *La relación entre q y x_1 se altera al variar x_2^0.* En la figura 3-1, se ha representado una familia, de curvas de productividad total. Cada curva da la relación entre q y x_1 para un valor diferente de x_2^0. Normalmente, un aumento de x_2^0 causará una reducción de la cantidad de X_1 necesaria para producir cada nivel de output, dentro del intervalo permisible de éste. Si una curva de productividad total está a la izquierda de otra, corresponde a un valor más alto de x_2^0:

$$x_2^{(1)} > x_2^{(2)} > x_2^{(3)}$$

Para valores concretos de x_2^0, las productividades media y marginal, de X_1 se definen de manera análoga. La *productividad media* (*PMe*) de X_1, es su productividad total dividida por su cantidad:

$$PMe = \frac{q}{x_1} = \frac{f(x_1, x_2^0)}{x_1} \tag{3-3}$$

La productividad marginal (*PMa*) de X_1 es la relación entre las variaciones de su productividad total y las variaciones en su cantidad, o sea la derivada parcial de (3-1) con respecto a x_1:

$$PMa = \frac{\partial q}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2^0) \tag{3-4}$$

Asignando valores diferentes a x_2^0, pueden construirse familias de curvas de *PMe* y *PMa*.

En la figura 3-2, se representan las curvas *PMe* y *PMa* correspondientes a una de las curvas de productividad total de la figura 3-1. A medida que aumenta la utilización de X_1, *PMe* y *PMa* crecen, y luego decrecen. La curva *PMa* alcanza un máximo a un nivel de input inferior al que determina el máximo de la curva *PMe*, y corta a la *PMe* en su punto máximo.[1] El nivel de input para el que *PMa* se iguala a 0 es el mismo que el nivel de input para el que la curva correspondiente de productividad total alcanza un máximo, o sea el punto para el que la pendiente

1. Para determinar el valor máximo de *PMe*, igualemos a cero sus derivadas parciales respecto a x_1:

$$\frac{\partial PMe}{\partial x_1} = \frac{x_1 f_1(x_1, x_2^0) - f(x_1, x_2^0)}{x_1^2} = 0$$

Si una fracción es igual a cero, su numerador debe ser nulo:

$$x_1 f_1(x_1, x_2^0) - f(x_1, x_2^0) = 0$$

Pasando el segundo término a la derecha, y dividiéndolo todo por x_1,

$$f_1(x_1, x_2^0) = \frac{f(x_1, x_2^0)}{x_1}$$

PMe y *PMa* se igualan en el punto máximo de *PMe*, si tal punto existe.

de su tangente es igual a cero. El nivel de input para el que *PMa* alcanza un máximo, es el mismo que el del punto de inflexión de la curva correspondiente de productividad total, o sea el punto en el que la pendiente de su tangente, alcanza un máximo (véase el punto *H* de la curva $x_2^{(1)}$ de la figura 3-1). El nivel de input a que la curva *PMe* alcanza un máximo, es el mismo nivel de input para el que la pendiente del vector, dibujado desde el origen a la curva de productividad total, alcanza un máximo (véase punto *J* en la curva $x_2^{(1)}$ de la figura 3-1).

Las curvas de productividad, dadas en las figuras 3-1 y 3-2, satisfacen la cuasi universal *ley de la productividad marginal decreciente*. Con el tiempo, la *PMa* de X_1 disminuirá a medida que aumente x_1, y *permaneciendo constante* x_2^0.[2] *La ley anterior no excluye la fase inicial*, de *PMa* creciente, que se muestra en el ejemplo siguiente: consideremos un proceso de producción en el que se combinan trabajo y tierra para la producción de trigo, y calculemos la cantidad de trigo producida si se aplican cantidades crecientes de trabajo a una cantidad fija de tierra. Inicialmente, el aumento del número de trabajadores puede fomentar la especialización, y de ello puede resultar una *PMa* del trabajo, creciente. *Sin embargo, después de realizadas estas economías iniciales, las ampliaciones ulteriores* del número de trabajadores darán lugar a incrementos, cada vez menores, en el output de trigo. La cantidad de trabajo se vuelve cada vez mayor en relación a la cantidad fija de tierra. Hay que hacer notar, que la ley de las productividades marginales decrecientes se refiere a las cantidades relativas de los inputs, y, por tanto, no es aplicable, si se aumentan ambos. El análisis de la productividad se aplica a variaciones de x_2 con x_1 como parámetro.

Como ejemplo concreto, consideremos la función de producción, dada por la ecuación de sexto grado

$$q = Ax_1^2 x_2^2 - Bx_1^3 x_2^3 \qquad (3\text{-}5)$$

donde $A, B > 0$. En las figs. 3-1 y 3-2, se representan las correspondientes curvas de productividad.[3] Haciendo $Ax_2^2 = k_1$ y $Bx_2^3 = k_2$, la familia de las curvas de productividad total de X_1, viene dada por la ecuación cúbica

$$q = k_1 x_1^2 - k_2 x_1^3$$

2. Esta ley se ha establecido de varias formas alternativas. Véase K. Menger "The Laws of return", O. Morgenstern (ed.), *Economic Activity Analysis* (New York: Wiley, 1954), pp. 419-482.

3. Para la construcción de las curvas de las figuras 3-1 y 3-2, se han utilizado los valores $A = 0{,}00$ y $B = 0{,}0001$.

en la que la cantidad de trabajo empleado, en relación a las cantidades de los otros inputs, es tan grande que un incremento de trabajo daría *paso a la aparición de congestión e ineficacia*. La *anterior definición* de la función de producción que garantiza un output máximo para cada posible combinación de inputs, no excluye esta posibilidad. Si la *PMa* de X_1 es negativa, y la de X_2, positiva, [4] la *RTS* es negativa, como se indica en el punto A de la figura 3-4. Un movimiento a lo largo de la isocuanta, de A a B, daría lugar a una reducción de x_1 y x_2 a la vez. Evidentemente, cuando el empresario tiene que pagar precios positivos por los inputs, el punto B es preferible al A. El empresario racional no operará nunca en la sección de pendiente positiva de una isocuanta; o sea, nunca utilizará una combinación de factores de la que resulte una *PMa* negativa para uno de los inputs. Las *líneas de contorno OC* y *OD*, delimitan el área de actuación racional.

3-2. La conducta de optimización

El análisis presente se limita al caso en el que el empresario compra X_1 y X_2 en mercados de competencia perfecta, a precios unitarios constantes. Su coste total de producción (C), viene dado por la ecuación lineal

$$C = r_1 x_1 + r_2 x_2 + b \tag{3-10}$$

dónde r_1 y r_2 son los precios respectivos de X_1 y X_2 y b es el coste de los inputs fijos. El lugar geométrico de las combinaciones de inputs que pueden comprarse por un coste total determinado se denomina *línea isocoste:*

$$C^0 = r_1 x_1 + r_2 x_2 + b \tag{3-11}$$

dónde C^0 es un parámetro.

Hallando el valor de x_1 en (3-11),

$$x_1 = \frac{C^0 - b}{r_1} - \frac{r_2}{r_1} x_2$$

Las pendientes de las líneas isocostes son iguales a la razón de los precios de los inputs con signo negativo. La intersección de una línea isocoste con el eje x_1 $[(C^0 - b)/r_1]$ determina la cantidad que podría comprarse

4. Y esta situación no se presentará nunca para la función de producción dada por (3-5). Si la *PMa* de uno de sus inputs es negativa, la del otro debe ser también negativa.

de X_1 si todo el gasto, excluyendo el costo de los inputs fijos, se dedicase a X_1; y la intersección con el eje x_2 $[(C^0 - b)/r_2]$ determina la cantidad que se podría comprar de X_2 si todo el gasto se realizara en X_2. En la figura 3-5, se representan tres de las líneas de una familia de isocostes. Cuanto mayor es el gasto total que corresponda a una línea

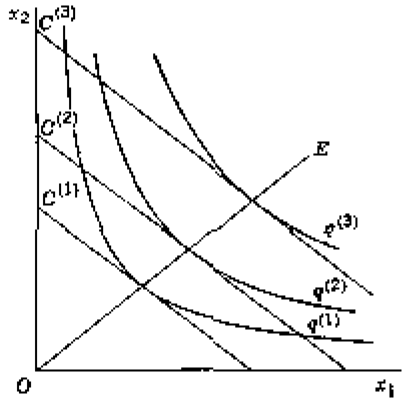


FIGURA 3-5

isocoste, mayores son los segmentos limitados por las intersecciones sobre los ejes x_1 y x_2, y, por tanto, más alejada se encuentra del origen: $C^{(3)} > C^{(2)} > C^{(1)}$. La familia de líneas isocostes ocupa totalmente el cuadrante positivo del plano x_1x_2.

MAXIMIZACIÓN CONDICIONADA DEL OUTPUT. — El consumidor maximiza su utilidad sujeto a su ecuación de balance. El problema análogo de la empresa es la maximización del output (3-1) sujeto a la restricción del coste (3-11). El empresario quiere obtener el mayor output posible, con un coste dado. Formemos la función

$$V = f(x_1, x_2) + \mu (C^0 - r_1 x_1 - r_2 x_2 - b) \qquad (3\text{-}12)$$

dónde $\mu \neq 0$ es un multiplicador de Lagrange, indeterminado, e igualemos a cero las derivadas parciales de V respecto a x_1, x_2, y μ:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = f_1 - \mu r_1 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = f_2 - \mu r_2 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = C^0 - r_1 x_1 - r_2 x_2 - b = 0$$

Pasando, en las dos primeras ecuaciones, los términos que contienen precios a la derecha y dividiendo la primera por la segunda, se tiene,

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{r_1}{r_2} \tag{3-13}$$

Las condiciones de primer grado establecen que la razón de las *PMa* de X_1 y X_2, debe ser igual a la razón de sus precios.

Las condiciones de primer grado, pueden expresarse de varias formas equivalentes. Hallando el valor de μ en las dos primeras ecuaciones,

$$\mu = \frac{f_1}{r_1} = \frac{f_2}{r_2} \tag{3-14}$$

La contribución al output del último dólar gastado, de cada input, debe ser igual a μ. El multiplicador de Lagrange μ es la derivada total del output con respecto al coste. [5]

Finalmente, sustituyendo el valor, $RTS = f_1/f_2$, de (3-9), en (3-13), queda

$$RTS = \frac{r_1}{r_2} \tag{3-15}$$

Las condiciones de primer grado pueden también formularse como la igualdad entre la *RTS* y la razón de los precios de los inputs. Las tres formulaciones de las condiciones de primer grado dadas por (3-13), (3-14). (3-15), son alternativas equivalentes. Si se satisface una, lo hacen las tres.

La formulación dada por (3-15) tiene una clara interpretación geométrica. La óptima combinación de inputs viene dada por el punto de tangencia entre una isocuanta y la línea isocoste pertinente. Si $C^{(3)}$ (véase figura 3-5) es el nivel predeterminado del coste, el output máximo es $q^{(3)}$. Los outputs correspondientes a todas las restantes isocuantas que tienen puntos en común con la línea isocoste dada, tales como $q^{(1)}$ y $q^{(2)}$ son menores que $q^{(3)}$.

5. Suponiendo que el costo es variable, la diferencial total de la ecuación de coste (3-10) es:

$$dC = r_1\,dx_1 + r_2\,dx_2$$

Sustituyendo $r_1 = f_1/\mu$ y $r_2 = f_2/\mu$, tenemos:

$$dC = \frac{1}{\mu}(f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2)$$

Dividiendo esta expresión por la diferencial total de la función de producción (3-8) la derivada total del output respecto al coste es:

$$\frac{dq}{dC} = \mu\,\frac{f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2}{f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2} = \mu$$

Las condiciones de segundo grado requieren que el Hessiano orlado relevante sea positivo.

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -r_1 \\ f_{21} & f_{22} & -r_2 \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (3\text{-}16)$$

Las condiciones de segundo grado se pueden utilizar para demostrar que la relación de variación de la pendiente de la tangente a una curva isocuanta debe ser positiva ($d^2x_2/dx_1^2 > 0$) en el punto de tangencia a una línea isocoste.[6] Lo que significa que las isocuantas deben ser convexas hacia el origen, como se muestra en la figura 3-5.

MINIMIZACIÓN CONDICIONADA DEL COSTE. — Es posible que el empresario desee minimizar el coste de producción de un determinado nivel de output. En este caso se minimiza (3-10) condicionado a (3-2). Formemos la función

$$Z = r_1 x_1 + r_2 x_2 + b + \lambda\,[q^0 - f(x_1, x_2)] \qquad (3\text{-}17)$$

e igualemos a cero las derivadas parciales de Z con respecto a x_1, x_2 y λ:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = r_1 - \lambda f_1 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_2} = r_2 - \lambda f_2 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = q^0 - f(x_1, x_2) = 0$$

Puesto que r_1 y f_1 son positivos, λ es también positivo. Pasando a la derecha los términos que contienen precios de las dos primeras ecuaciones, y dividiendo la primera por la segunda,

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{f_1}{r_1} = \frac{f_2}{r_2} \quad \text{ó} \quad RTS = \frac{r_1}{r_2}$$

Las condiciones de primer grado para la minimización condicionada del coste sujeta a una limitación de output son parecidas a las de maximización condicionada del output sujeta a una limitación de coste. El multi-

6. La derivación formal es idéntica a la usada para demostrar que la relación de variación de la pendiente de la curva de indiferencia debe ser positiva en el punto de máxima utilidad (véase sección 2-2).

plicador λ es el recíproco del μ, o la derivada total del coste con respecto al output (definida como coste marginal en la sección 3-3). En el caso presente, el empresario halla la línea isocoste más baja que tenga, al menos, un punto en común con la isocuanta predeterminada. Podría producir $q^{(1)}$ (véase fig. 3-5) a un coste $C^{(3)}$ o $C^{(2)}$, pero $C^{(1)}$ es más bajo que cualquiera de éstos. Su coste mínimo viene dado por la línea isocoste que es tangente a la isocuanta elegida.

Las condiciones de segundo grado requieren que el Hessiano orlado relevante sea negativo:

$$\begin{vmatrix} -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -f_1 \\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -f_2 \\ -f_1 & -f_2 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

Sustituyendo $-f_1 = -r_1/\lambda$ y $-f_2 = -r_2/\lambda$, multiplicando las dos primeras columnas del determinante por $-1/\lambda$, y multiplicando entonces la primera fila por $-\lambda^2$ y la tercera columna por λ, [7]

$$\begin{vmatrix} -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -\dfrac{r_1}{\lambda} \\ -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -\dfrac{r_2}{\lambda} \\ -\dfrac{r_1}{\lambda} & -\dfrac{r_2}{\lambda} & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -\dfrac{r_1}{\lambda} \\ f_{21} & f_{22} & -\dfrac{r_2}{\lambda} \\ \dfrac{r_1}{\lambda^2} & \dfrac{r_2}{\lambda^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -r_1 \\ f_{21} & f_{22} & -r_2 \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

Y como $\lambda > 0$

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -r_1 \\ f_{21} & f_{22} & -r_2 \\ -r_1 & -r_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Las condiciones de segundo grado son las mismas que las dadas por (3-16.)

Si se satisfacen las condiciones de segundo grado, cada punto de tangencia entre una línea isocoste y una isocuanta es, a la vez, la solución

7. La multiplicación de la primera columna por $-1/\lambda$ aumenta el valor del determinante por el mismo múltiplo. La multiplicación de las dos columnas, primera y segunda por $-1/\lambda$, incrementa el valor del determinante en $1/\lambda^2$. Su valor permanece idéntico si toda la ordenación se multiplica ahora por λ^2 (véase sección A-1).

de un máximo y un mínimo condicionados. Si $q^{(1)}$ (ver fig. 3-5) es el output máximo que puede obtenerse con un gasto de $C^{(1)}$ dólares, $C^{(1)}$ dólares es el coste mínimo al que puede producirse el output $q^{(1)}$. El lugar geométrico de los puntos de tangencia da la *trayectoria de expansión* de la empresa. El empresario racional solamente seleccionará combinaciones de inputs que estén en su ruta de expansión. Formalmente, la trayectoria de expansión es una función implícita de x_1 y x_2:

$$g(x_1, x_2) = 0 \tag{3-18}$$

para la que se cumplen las condiciones de primero y segundo grado de máximo y mínimo condicionados.

Si las isocuantas son convexas hacia el origen, las condiciones de segundo grado se satisfarán siempre, y la trayectoria de expansión puede deducirse de las condiciones del primer grado. Consideremos, como ejemplo, la función de producción dada por (3-5). Calculemos la razón de las PMa de X_1 y X_2:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{2\,Ax_1 x_2^2 - 3\,Bx_1^2 x_2^3}{2\,Ax_1^2 x_2 - 3\,Bx_1^3 x_2^2} = \frac{x_2(2\,Ax_1 x_2 - 3\,Bx_1^2 x_2^2)}{x_1(2\,Ax_1 x_2 - 3\,Bx_1^2 x_2^2)} = \frac{x_2}{x_1}$$

e igualémoslas a la razón de los precios de los inputs

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

Expresando la condición de primer grado anterior en forma de función implícita, la trayectoria de expansión viene dada por la ecuación lineal

$$r_1 x_1 - r_2 x_2 = 0$$

que corresponde a la trayectoria de expansión, OE, de la figura 3-5.

Maximización del beneficio. — Generalmente, el empresario tiene libertad para variar los niveles de coste y output, y su último objetivo es la maximización del beneficio, no la solución de problemas de máximos y mínimos condicionados. El ingreso del empresario que vende su output en un mercado de competencia perfecta lo determina el número de unidades que vende multiplicado por el precio (p) fijo unitario que percibe. Su beneficio (π) es la diferencia entre su ingreso total y su coste total:

$$\pi = pq - C$$

o sustituyendo $q = f\ (x_1, x_2)$, de (3-1), y $C = r_1x_1 + r_2x_2 + b$ de (3-10), resulta,

$$\pi = pf\ (x_1, x_2) - r_1 x_1 - r_2 x_2 - b \tag{3-19}$$

El beneficio es una función de x_1 y x_2 y se maximiza con respecto a estas variables.

Igualando a cero las derivadas parciales de (3-19) con respecto a x_1 y x_2,

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = pf_1 - r_1 = 0 \qquad \frac{\partial \pi}{\partial x_2} = pf_2 - r_2 = 0 \tag{3-20}$$

Pasando a la derecha los términos que contienen precios de inputs, resulta:

$$pf_1 = r_1 \qquad pf_2 = r_2 \tag{3-21}$$

Las derivadas parciales de la función de producción con respecto a los inputs son las *PMa* de dichos inputs. El valor de la productividad marginal de $X_1 (pf_1)$ es la relación a la que aumentaría el ingreso del empresario con una nueva aplicación de X_1. Las condiciones de primer grado para la maximización del beneficio (3-21) exigen que cada input se utilice hasta que el valor de su *PMa* iguale a su precio. Mientras las adiciones a sus ingresos, provenientes del empleo de unidades adicionales de X_1, excedan a sus costes adicionales, el empresario puede aumentar su beneficio. Finalmente, como (3-21) es un caso especial de (3-13), la combinación de inputs que proporciona el máximo beneficio se encuentra en la ruta de expansión.

Las condiciones de segundo grado exigen que los menores principales del Hessiano relevante alternen de signo:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} < 0; \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_1\, \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_2\, \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0 \tag{3-22}$$

Desarrollando el segundo determinante de (3-22)

$$\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1\, \partial x_2}\right)^2 > 0 \tag{3-23}$$

puesto que

$\partial^2 \pi / \partial x_1\, \partial x_2 = \partial^2 \pi / \partial x_2\, \partial x_1$. Puesto que $\partial^2 \pi / \partial x_1^2 < 0$ y $(\partial^2 \pi / \partial x_1\, \partial x_2)^2 > 0$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} < 0 \tag{3-24}$$

donde la numeración de los inputs es intrascendente. El beneficio ha de ser decreciente respecto a nuevas aplicaciones de X_1 o X_2. La condición (3-23) garantiza que el beneficio es decreciente respecto a nuevas aplicaciones de ambos X_1 y X_2.

Las condiciones de segundo grado requieren que las *PMa* de ambos inputs sean decrecientes. Utilizando las segundas derivadas parciales de (3-20) para valorar (3-22) y (3-24),

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2}\ p f_{11} < 0 \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2}\ p f_{22} < 0$$

Al ser $p > 0$,

$$f_{11} < 0 \qquad f_{22} < 0 \tag{3-25}$$

Si la *PMa* de uno de los inputs fuera creciente, un pequeño movimiento, desde el punto en que se satisfacen las condiciones de primer grado, daría lugar a un incremento del valor de sus *PMa*. Como su precio es constante, el empresario podría aumentar su beneficio aumentando las cantidades de inputs.

3-3. Funciones de Coste

Muy a menudo, el economista considera resuelto el problema de la determinación de la óptima combinación de inputs, y lleva a cabo el análisis de la empresa en términos de ingresos y costes como funciones del output. En estas condiciones, el problema del empresario consiste en seleccionar el output que maximice su beneficio.

Funciones de coste a corto plazo. — La información contenida en las secciones 3-1 y 3-2 permite deducir las funciones de coste. [8] Consideremos el sistema de ecuaciones constituído por la función de producción (3-1), la ecuación de coste (3-10) y la función de la trayectoria de expansión (3-18):

$$\begin{aligned} q &= f(x_1, x_2) \\ C &= r_1 x_1 + r_2 x_2 + b \\ 0 &= g(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Este sistema de tres ecuaciones con cuatro variables puede reducirse a

8. El término *función de coste* se usa para denotar el coste expresado como función del output. El término *ecuación de coste* se usa para calificar el coste expresado en términos de los niveles de inputs y precios.

una sola ecuación en la que el coste se exprese como función explícita del nivel de output y del coste de los inputs fijos:

$$C = \varphi(q) + b \tag{3-26}$$

El coste de los inputs fijos, *el coste fijo*, hay que pagarlo independientemente de cuanto produzca la empresa, o de si ni siquiera produce. La función de coste expresa el coste mínimo para producir cada output y se obtiene bajo el supuesto de que el empresario actúa racionalmente. *Es posible obtener una combinación coste-output del tipo de (3-26)*, actuando de la siguiente forma: 1) seleccionemos un punto en la trayectoria de expansión; 2) sustituyamos en la función de producción, los valores correspondientes de los niveles de input, para obtener el correspondiente nivel de output; 3) multipliquemos los niveles de input por los precios de los inputs fijos para obtener el coste variable total de este nivel de output, y 4) sumemos el coste fijo.

De (3-26) puede deducirse un cierto número de especiales relaciones de coste que son también funciones del nivel de output. Los costes totales medios (*CTMe*), variables medios (*CVMe*) y fijos medios (*CFMe*) son los respectivos costes totales, variables y fijos, divididos por el nivel de output:

$$CTMe = \frac{\varphi(q) + b}{q}$$

$$CVMe = \frac{\varphi(q)}{q}$$

$$CFMe = \frac{b}{q}$$

CTMe es la suma de *CVMe* y *CFMe*. El coste marginal (*CMa*) es la derivada del coste total respecto al output:

$$CMa = \frac{dC}{dq} = \varphi'(q)$$

Las derivadas de los costes totales y variables son idénticas, puesto que los costes fijos desaparecen en la diferenciación.

Las funciones de coste pueden adoptar varias formas diferentes. En las figuras 3-6 y 3-7 se han dibujado unas entre las posibles, que gozan de las propiedades habitualmente supuestas por los economistas. El coste total es función cúbica del output.

Las *CTMe*, *CVMe* y *CMa* son todas curvas de segundo grado que, a medida que se aumenta el output, al principio disminuyen y luego aumentan. *CMa* alcanza su mínimo antes, que *CTMe* y *CVMe*, y *CVMe* alcanza su mínimo antes que *CTMe*. El lector observará que la curva de *CMa* pasa por los puntos mínimos de *CTMe* y *CVMe*.[9] La curva *CFMe* es una hipérbola equilátera, independientemente de las formas de las otras curvas de coste; cuando aumenta el output, el coste fijo se reparte entre un número mayor de unidades y, por tanto, decrece monótonamente. La distancia vertical entre las curvas *CTMe* y *CVMe* es igual a *CFMe*, de aquí que disminuya cuando aumenta el output.

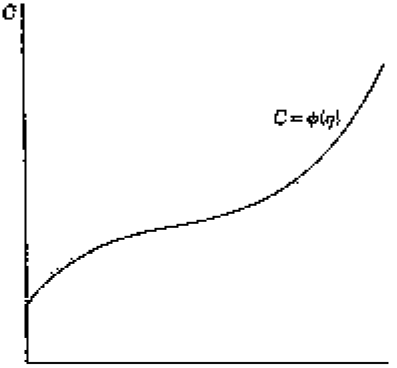


FIGURA 3-6

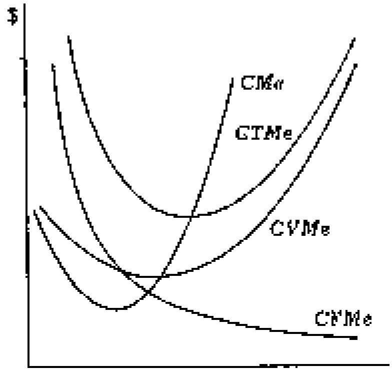


FIGURA 3-7

Los ingresos de un empresario que vende su output a un precio fijo son también función del nivel de dicho output:

$$\pi = pq - \varphi(q) - b \tag{3-27}$$

Para maximizar el beneficio, igualemos a cero la derivada de (3-27) con respecto a q:

$$\frac{d\pi}{dq} = p - \varphi'(q) = 0$$

Pasando *CMa* al lado derecho,

$$p = \varphi'(q) \tag{3-28}$$

El empresario debe igualar su *CMa* al precio fijo de venta de su output. En efecto, le es posible incrementar su beneficio, aumentando su output,

9. Igualemos a cero la derivada de *CTMe* (o *CVMe*), y pongamos la ecuación en forma que establezca la igualdad entre *CTMe* (o *CVMe*) y *CMa* (véase sección A-2).

si con la venta de una unidad adicional, el ingreso adicional correspondiente (p) excede al coste (CMa).

La condición de segundo grado para la maximización del beneficio requiere que

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -\frac{d^2C}{dq^2} < 0$$

o multiplicando por -1, e invirtiendo la desigualdad,

$$\frac{d^2C}{dq^2} > 0$$

El CMa debe ser creciente para el output de beneficio máximo. Si el CMa fuera decreciente, la igualdad de precio y CMa determinaría un punto de beneficio mínimo.

Generalmente, el nivel del coste fijo del empresario (b) no afecta sus decisiones de optimización en el período a corto plazo. El coste fijo hay que pagarlo independientemente del nivel de su output y su influencia única consiste en añadir un término constante a la ecuación de beneficio. El término del coste-fijo desaparece al diferenciar, por ello el CMa es independiente de su nivel. Puesto que las condiciones de primero y segundo grado para la maximización del beneficio se expresan en términos del CMa, el nivel de output de equilibrio no está influido por el nivel de coste fijo. Habitualmente, el análisis matemático de la optimización, de las secciones 3-2 y de la presente, se puede formular en términos exclusivos de la función de costes variables.

Para el análisis de la maximización del beneficio a corto plazo, el nivel del coste fijo sólo es relevante en un caso especial. En efecto, el empresario dispone de una opción que no le reconoce el cálculo matemático. Puede interrumpir la producción, aceptando una pérdida igual a su coste fijo. Esta opción es óptima si el beneficio máximo, procedente de la producción de un nivel positivo de output, es una cantidad negativa (una pérdida) cuyo valor absoluto es mayor que el nivel del coste fijo. El empresario no tiene por qué perder más que la cuantía de su coste fijo. Producirá con pérdida a corto plazo, si dicha pérdida es menor que su coste fijo, o sea, si el ingreso excede el coste variable total, y es así capaz de recobrar una parte de su gasto en costes fijos.

La figura 3-8 es una descripción geométrica de la maximización del beneficio. El output óptimo (q^0) viene dado por la intersección de la línea horizontal trazada al nivel del precio vigente (p^0) y la porción creciente de la curva CMa. El ingreso del empresario es el área de rectángulo Op^0Bq^0, el coste total $OADq^0$, y el beneficio Ap^0BD.

Consideremos como ejemplo la función cúbica de coste total

$$C = 0{,}04\,q^3 - 0{,}9\,q^2 + 10\,q + 5 \tag{3-29}$$

Supongamos que el precio de q es 4 dólares por unidad. Igualando el CMa y el precio,

$$0{,}12\,q^2 - 1{,}8\,q + 10 = 4$$

de la que resulta la ecuación cuadrática

$$q^2 - 15\,q + 50 = 0$$

cuyas raíces son $q = 5$ y $q = 10$. Hay dos volúmenes de output diferentes que satisfacen la condición de primer grado para la maximización del beneficio, y, por tanto, es preciso calcular para ambos las relaciones de variación del CMa. La relación de variación del CMa es:

$$\frac{d^2C}{dq^2} = 0{,}24q - 1{,}8$$

negativa para $q = 5$ y positiva para $q = 10$. Un output de 10 unidades proporciona un beneficio máximo, y uno de 5 otro mínimo. El beneficio con las diez unidades es, sin embargo, negativo:

$$\pi = 4\,q - (0{,}04\,q^3 - 0{,}9\,q^2 + 10\,q + 5) = 40 - 55 = -15$$

Para cada nivel de output la curva $CFMe$ del empresario está por encima de la línea del precio y el beneficio máximo del empresario es una pérdida de 15 dólares. El empresario debería interrumpir la producción puesto que su coste fijo (5 dólares) es menor que la pérdida más pequeña en que incurre con cualquier nivel positivo del output.

FUNCIONES DE COSTE A LARGO PLAZO. — Representemos los niveles de los inputs fijos del empresario por un parámetro k, que indica el "tamaño de su empresa" — cuanto mayor sea el valor k, mayor es el tamaño de la empresa —. Los problemas empresariales a corto plazo se refieren a la óptima utilización de una empresa de un tamaño dado. A largo plazo, el empresario puede variar k y escoger una empresa de dimensión óptima. Las formas de las funciones de producción y coste del empresario dependen de la dimensión de su empresa. A corto plazo están determinadas en forma unívoca. A largo plazo el empresario puede escoger entre funciones de coste y producción de formas diferentes. El número de sus alternativas es igual al de los diversos valores que puede tomar k. Una vez que haya seleccionado las formas de estas funciones, o sea elegido un valor para k, el empresario se enfrenta con los problemas convencionales de la optimización a corto plazo.

Como ilustración, consideremos el caso de un empresario que dirige un almacén. El tamaño de su empresa viene dado por el número de pies cuadrados, que posee, de espacio para la venta. Supongamos que las únicas alternativas posibles son 5.000, 10.000 y 20.000 pies cuadrados, y que él posee en aquel momento, 10.000. El tamaño actual de su empresa es *el resultado de una decisión, a largo plazo, hecha en el* pasado. Cuando se presente la hora de renovar su almacén, estará de nuevo en disposición de elegir el tamaño de su empresa. Si las condi-

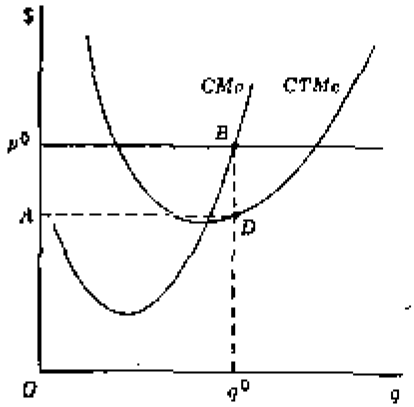


FIGURA 3-8

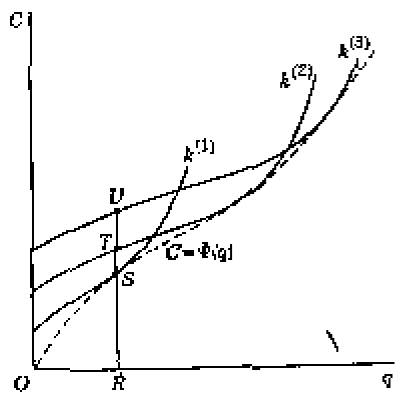


FIGURA 3-9

ciones no han cambiado desde su última decisión, escogerá una vez más 10.000 pies cuadrados. Si el almacén ha sido muy concurrido, y él prevé un aumento de ventas, a largo plazo, comprará 20.000 pies cuadrados. En diferentes condiciones puede elegir un almacén de 5.000 pies cuadrados. Una vez que ha *construido el nuevo almacén, sus problemas* se reducen a la óptima utilización de una área de venta de un tamaño dado.

Supongamos que k es continuamente variable, e introduzcámoslo explícitamente en la función de producción, la ecuación de coste, y la función de la trayectoria de expansión:

$$\begin{aligned} q &= f(x_1, x_2, k) \\ C &= r_1 x_1 + r_2 x_2 + \psi(k) \\ 0 &= g(x_1, x_2, k) \end{aligned}$$

El coste fijo es una función creciente del tamaño de la empresa: $\psi'(k) > 0$. Las formas de las familias de isocuantas e isocostes y la de la trayectoria de expansión dependen del valor asignado al parámetro k. Habitualmente es posible utilizar dos de las relaciones anteriores para eliminar x_1 y x_2, con lo que se puede expresar el coste total en función del nivel de output y del tamaño de la empresa:

$$C = \varphi\,(q, k) + \psi\,(k) \tag{3-30}$$

función que describe la familia de curvas de coste total que se genera al asignar diferentes valores al parámetro k. Tan pronto como se da un valor particular $k = k^0$, al tamaño de la empresa (3-30), se transforma en una función equivalente de la de coste total dada por (3-26), y desde este momento es aplicable el análisis a corto plazo.

La función de coste total a largo plazo, del empresario, da el mínimo coste de producción de cada nivel de output cuando es libre de variar el tamaño de su empresa. Para un nivel dado de output el empresario calcula el coste total para cada posible tamaño de empresa y escoge aquel en el que el coste es mínimo. La figura 3-9 contiene las curvas de coste total correspondiente a tres tamaños diferentes de la empresa. El empresario puede producir el output OR en cualquiera de las tres empresas. Su coste total sería RS para empresa de tamaño $k^{(1)}$, RT para $k^{(2)}$, y RU para $k^{(3)}$. El tamaño de la empresa $k^{(1)}$ da el mínimo coste de producción para el output OR. Por tanto, el punto S está en la curva de coste total a largo plazo. Este proceso se repite para cada nivel de output, y la curva de coste total a largo plazo se define como el lugar geométrico de los puntos de costes mínimos.

La curva de coste a largo plazo es la envolvente de las curvas a corto plazo; las toca a todas y no corta a ninguna. Escribamos la ecuación de la familia de funciones de coste a corto plazo (3-30), en forma implícita:

$$C - \varphi\,(q, k) - \psi\,(k) = G\,(C, q, k) = 0 \tag{3-31}$$

e igualemos a cero las derivadas parciales de (3-31) con respecto a k:

$$G_k\,(C, q, k) = 0 \tag{3-32}$$

La ecuación de la curva envolvente (la curva de costes a largo plazo) se obtiene eliminando k de (3-31) y (3-32) y hallando el valor para el C en función de q (ver sección A-3):

$$C = \Phi(q) \tag{3-33}$$

Dada la condición que cada nivel de output se produzca en una empresa de dimensión óptima, el coste total a largo plazo es una función del

La situación es completamente distinta si el precio se aumenta a 6 dólares. Igualemos el *CMa* y el precio, se obtiene la ecuación cuadrática

$$0{,}12\, q^2 - 1{,}9\, q + 5 = 0$$

con las raíces $q = 3{,}3$ y $q = 12{,}5$. Un output de 12,5 unidades maximiza el beneficio. Para esta dimensión de empresa, el beneficio es positivo:

$$\pi = 75 - 67{,}1875 = 7{,}8125$$

y el empresario construirá una empresa de dimensión óptima ($k = 1{,}25$).

3-4. Funciones de producción homogéneas

Los "rendimientos" describen la reacción del output ante un aumento proporcional de todos los inputs empleados. Si el output aumenta en la misma proporción que los inputs, el rendimiento es constante, para las combinaciones de inputs que se consideran. Los rendimientos son crecientes si el output aumenta en proporción mayor, y decrecientes si aumenta en menor proporción. Una sola función de producción puede mostrar los tres tipos de rendimientos. Algunos economistas suponen que las funciones de producción muestran rendimientos crecientes para pequeños aumentos de los inputs, pasan entonces por una etapa de rendimientos constantes, y finalmente, a medida que las cantidades de input son cada vez mayores, muestran rendimientos decrecientes.

Propiedades. — El concepto de rendimiento se define fácilmente mediante las funciones de producción homogéneas. Una función es homogénea de grado k si

$$f(tx_1, tx_2) = t^k f(x_1, x_2) \tag{3-37}$$

donde k es una constante y t es cualquier número real positivo. Si ambos inputs se aumentan por el factor t, el output aumenta por el t^k. Los rendimientos son crecientes si $k > 1$, constantes si $k = 1$, y decrecientes si $k < 1$. Para las funciones de producción raras veces se suponen grados de homogeneidad distintos a uno. [11]

Las derivadas parciales de una función homogénea de grado k son homogéneas de grado $(k - 1)$. Diferenciemos parcialmente (3-37) con

11. Se dice que una función es homogénea linealmente cuando es homogénea de grado uno. Aunque esto no implica, desde luego, que la función de producción sea lineal.

respecto a x_1, utilizando en el lado izquierdo, la regla de la función de función (ver Sección A-2):

$$tf_1(tx_1, tx_2) = t^k f_1(x_1, x_2)$$

Dividiéndolo todo por t,

$$f_1(tx_1, tx_2) = t^{k-1} f_1(x_1, x_2)$$

que es la definición de homogeneidad de grado $k-1$. Si una función de producción es homogénea de grado uno, las productividades marginales de X_1 y X_2 son homogéneas de grado 0, o sea: permanecen inalteradas ante cambios proporcionales de ambos inputs:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= f_1(tx_1, tx_2) \\ f_2(x_1, x_2) &= f_2(tx_1, tx_2) \end{aligned} \tag{3-38}$$

Las *PMa* dependen exclusivamente de la proporción en que se usan X_1 y X_2.

En el plano isocuanto una línea recta desde el origen se define por (0,0) y cualquier punto arbitrario por (x_1^0, x_2^0). Tal línea es el lugar geométrico de todos los puntos (tx_1^0, tx_2^0) para $t \geqq 0$. La *RTS* de cualquier punto escogido arbitrariamente sobre esta línea iguala la razón de las productividades marginales de la combinación de inputs correspondientes a aquel punto:

$$\frac{f_1(tx_1^0, tx_2^0)}{f_2(tx_1^0, tx_2)} = \frac{t^{k-1} f_1(x_1^0, x_2^0)}{t^{k-1} f_2(x_1^0, x_2^0)} = \frac{f_1(x_1^0, x_2^0)}{f_2(x_1^0, x_2^0)}$$

La *RTS* en (tx_1^0, tx_2^0) iguala la *RTS* en (x_1^0, x_2^0). Si la función de producción es homogénea, la trayectoria de la expansión, que es el lugar geométrico de los puntos con *RTS* igual a la razón de los precios de los inputs fijos, es una línea recta. Sin embargo, la trayectoria de expansión en línea recta, no implica necesariamente una función de producción homogénea. La función de producción dada por (3-5) posee una trayectoria de expansión en línea recta, pero no es homogénea.

Una de las funciones de producción homogéneas más usadas es la función de Cobb-Douglas, para la economía en su conjunto:

$$q = Ax_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \tag{3-39}$$

dónde q es un índice del output total, x_1 y x_2 son los inputs totales de trabajo y capital respectivamente y $0 < \alpha < 1$. Aumentando ambos niveles de trabajo y capital por el factor t,

$$f(tx_1, tx_2) = A(tx_1)^{\alpha}(tx_2)^{1-\alpha} = tAx_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

La función de Cobb-Douglas es homogénea de grado uno. Las *PMa* del trabajo y capital son homogéneas de grado cero:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &= \alpha\,(Ax_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}) \\
f_2(x_1, x_2) &= (1-\alpha)\,(Ax_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}) \\
f_1(tx_1, tx_2) &= \alpha\,(At^{\alpha-1} x_1^{\alpha-1} t^{1-\alpha} x_2^{1-\alpha}) = \alpha\,(Ax_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}) \\
f_2(tx_1, tx_2) &= (1-\alpha)\,(At^{\alpha} x_1^{\alpha} t^{-\alpha} x_2^{-\alpha}) = (1-\alpha)\,(Ax_1^{\alpha} x_2^{-\alpha})
\end{aligned}
$$

La trayectoria de expansión generada por la función de Cobb-Douglas es lineal.

Las condiciones de primer grado de un óptimo condicionado requieren que

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\alpha\,(Ax_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha})}{(1-\alpha)\,(Ax_1^{\alpha}x_2^{-\alpha})} = \frac{\alpha x_2}{(1-\alpha)\,x_1}$$

Por tanto, la trayectoria de expansión viene dada por la función implícita

$$(1-\alpha)\,r_1 x_1 - \alpha\, r_2 x_2 = 0$$

que en el plano isocuanto describe una línea recta que parte del origen.

El teorema de Euler y la distribución. — El teorema de Euler establece que una función homogénea satisface la condición siguiente: [12]

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 = kf(x_1, x_2) \tag{3-40}$$

Suponiendo que la función de producción es homogénea de grado uno, y sustituyendo $q = f(x_1, x_2)$,

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 = q \tag{3-41}$$

El output total es igual a la *PMa* de X_1 multiplicada por su cantidad más la *PMa* de X_2 multiplicada por la suya. Si la empresa pagase a los oferentes de inputs su productividad marginal física, el output total se agotaría totalmente. Si el grado de homogeneidad fuese superior a uno, el output total excedería a los pagos, y si fuese menor que uno, el output no cubriría los pagos a realizar.

El teorema de Euler juega un papel importante en el desarrollo de la teoría de la distribución de la escuela de la productividad marginal.

12. Diferenciando parcialmente (3-37) con respecto a t, usando la regla de la función compuesta en el lado izquierdo,

$$x_1 f_1(tx_1, tx_2) + x_2 f_2(tx_1, tx_2) = kt^{k-1} f(x_1, x_2)$$

Sustituyendo $t = 1$, se obtiene la ecuación (3-40).

Los postulados básicos de esta teoría son: 1) se paga por cada input el valor de su productividad marginal, y 2) *el output total se agota completamente*. Puesto que las funciones de producción homogéneas de grado uno satisfacen estas dos condiciones, se supuso casi unánimemente, que todas las funciones de producción son de este tipo.

Para lograr una verificación empírica de la teoría de la distribución de la productividad marginal se utilizó la función de Cobb-Douglas, que satisface el teorema de Euler:

$$\begin{aligned} q &= x_1 (\alpha A x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}) + x_2 [(1-\alpha) A x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}] \\ &= \alpha A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} + (1-\alpha) A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Sustituyendo, de (3-39),

$$q = \alpha q + (1-\alpha) q$$

Si a cada factor se le paga su productividad marginal, el output total se distribuye entre trabajo y capital en la proporción α y $(1-\alpha)$ respectivamente. Paul Douglas estimó α de los datos de series temporales agregadas y comparó sus estimaciones con la participación del trabajo en output total. [13]

La condición de que se agote el producto es equivalente a la de que el beneficio máximo a largo plazo sea igual a cero. Multiplicando (3-41) por el precio del producto,

$$x_1 (pf_1) + x_2 (pf_2) = pq$$

Sustituyendo $r_1 = pf_1$ y $r_2 = pf_2$, de las condiciones de primer grado para la maximización del beneficio,

$$r_1 x_1 + r_2 x_2 = pq \tag{3-42}$$

A largo plazo, el gasto total es igual al ingreso total. Siguiendo los supuestos de la teoría de la productividad marginal, la ecuación (3-42) conduce a la sorprendente conclusión de que el beneficio a largo plazo es igual a cero, independientemente del nivel del precio del producto.

El análisis de la teoría de distribución de la productividad marginal es confuso, si no erróneo. El análisis convencional de la maximización del beneficio se desmorona si el empresario vende su output a un precio constante y posee una función de producción homogénea de grado uno. El lector puede darse cuenta de que, en este caso, su función de beneficio es también homogénea de grado uno:

$$t\pi = pf(tx_1, tx_2) - r_1 tx_1 - r_2 tx_2$$

13. Véase la lista de referencias al final de este capítulo.

Tres resultados son posibles. Si los precios son tales que con alguna combinación de factores se obtiene un beneficio positivo, el beneficio puede incrementarse a cualquier nivel, eligiendo un valor de t lo suficientemente grande. En este caso la función de beneficio no tiene un máximo finito. Si los precios son tales que cualquier combinación de factores da un beneficio negativo, el empresario abandonará el negocio.

La tercera posibilidad, a la que generalmente limitan sus análisis los teóricos de la productividad marginal, es la más interesante. En este caso no hay ninguna combinación de factores que dé un beneficio positivo, pero la combinación (x_1^0, x_2^0) da un beneficio cero. De la homogeneidad de la función de beneficio se sigue que la combinación de factores (tx_1^0, tx_2^0) dará también un beneficio nulo. El beneficio máximo, a largo plazo, es igual a cero, pero entonces la dimensión de la empresa es indeterminada. Si el empresario puede obtener un beneficio nulo con una combinación concreta de factores, su beneficio permanece invariable si dobla o divide por dos la escala de sus operaciones. Cuando se impone al empresario una escala arbitraria de actividad, el teorema de Euler se cumple, y su producto se agota.

Para que se cumplan los postulados de la teoría de la productividad marginal, no es preciso el supuesto de la función de producción homogénea. Sus postulados se cumplen: 1) si la función de producción no es homogénea; 2) si se cumplen las condiciones de primero y segundo grado para la maximización del beneficio, y 3) si el beneficio máximo del empresario es igual a cero. Las condiciones primera y segunda se han supuesto a lo largo de todo el desarrollo de la teoría de la empresa, en las secciones 3-1 y 3-2. En el capítulo 4 se demostrará que la libre entrada y salida del mercado de las empresas competidoras da lugar al cumplimiento de la condición 3.ª, que requiere que

$$\pi = pq - r_1 x_1 - r_2 x_2 = 0$$

sustituyendo $r_1 = pf_1$ y $r_2 = pf_2$ (las condiciones de primer grado), y despejando q,

$$q = x_1 f_1 + x_2 f_2$$

con lo que se llega al mismo resultado de (3-41) sin el uso del teorema de Euler. Aún más: como la función de producción no es homogénea, la óptima combinación de factores del empresario, es, generalmente, determinada.

Funciones de coste a largo plazo. — Una función de producción homogénea de grado uno genera una función de coste total a largo plazo, lineal. Sea $(x_1^0 \; x_2^0)$ la óptima combinación de inputs para la producción de una unidad de Q. El correspondiente coste de producción es $r_1x_1^0 + r_2x_2^0$. Al ser la función de producción homogénea y la trayectoria de expansión lineal, $(qx_1^0 + qx_2^0)$ es la óptima combinación de input para la producción de q unidades de Q. El correspondiente coste de producción es,

$$C = aq$$

dónde $a = r_1x_1^0 + r_2x_2^0$. El coste marginal y el medio son ambos iguales a la constante a.

La función de coste total para la función de producción de Cobb-Douglas puede deducirse, más fácilmente, de la forma convencional. Escribiendo la función de producción, la ecuación de coste y la función de la trayectoria de expansión,

$$\begin{aligned} q &= Ax_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \\ C &= r_1 x_1 + r_2 x_2 \\ (1-\alpha) r_1 x_1 - \alpha r_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Hallando los valores x_1 y x_2 en las ecuaciones segunda y tercera,

$$x_1 = \frac{\alpha C}{r_1} \qquad x_2 = \frac{(1-\alpha)\, C}{r_2}$$

y sustituyendo estos valores en la función de producción,

$$q = A \left(\frac{\alpha C}{r_1}\right)^{\alpha} \left[\frac{(1-\alpha)\, C}{r_2}\right]^{1-\alpha}$$

Hallando el valor de C en términos de q y de los parámetros, la función de coste total es

$$C = aq$$

donde

$$a = \frac{r_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha}}{A\alpha^{\alpha} (1-\alpha)^{(1-\alpha)}}$$

La ruptura del análisis de la maximización del beneficio para funciones de producción homogéneas puede ilustrarse con la ayuda de funciones de coste e ingreso. Expresando el beneficio en función de output

$$\pi = pq - aq$$

e igualando a cero su derivada, resulta

$$p - a = 0$$

La condición de primer grado exige que el empresario iguale dos constantes. Tarea imposible a menos que por azar el precio y el coste marginal sean iguales. El empresario es incapaz de modificar el precio o el coste marginal mediante variaciones de su output. Si el precio excede el coste marginal, el empresario aumentará ilimitadamente su output; si $p = a$, el nivel de su output es indeterminado; y si $p < a$, se verá forzado a abandonar el negocio.

3-5. Producción conjunta

Algunos procesos de producción dan lugar a más de un output. El ejemplo clásico es la cría de corderos. Un solo proceso permite la producción, en proporciones variables, de dos outputs, lana y carne.[14] En el análisis económico el caso de la producción conjunta se refiere a conjunción técnica, no la que surge como consecuencia de fenómenos de organización y se plantea cuando quiera que las cantidades de dos o más outputs son técnicamente interdependientes. En virtud de esta definición, quedan excluidos aquellos casos en que una sola empresa produce dos o más productos técnicamente independientes.

Conceptos básicos. — Consideremos el caso más simple, en el que un empresario usa un solo input (X) para la producción de dos outputs (Q_1 y Q_2). En forma implícita su función de producción es

$$H(q_1, q_2, x) = 0 \tag{3-43}$$

donde q_1, q_2 y x son las cantidades respectivas de Q_1, Q_2 y X. Supongamos que de (3-43) puede hallarse el valor de x

$$x = h(q_1, q_2) \tag{3-44}$$

El coste de producción en *términos de* X es una función de las cantidades de los outputs.

Se denomina *curva de transformación de productos* el lugar geométrico de las combinaciones de output que pueden obtenerse con un input dado de X:

$$x^0 = h(q_1, q_2) \tag{3-45}$$

14. La producción conjunta de artículos no requiere un análisis extenso, a menos que pueda producirse en proporciones variables. Si dos productos se producen siempre en una proporción fija: $q_1/q_2 = k$ donde k es una constante, se puede aplicar el análisis de un solo output. Definamos una unidad compuesta de output como k unidades de Q_1 y 1 unidad de Q_2 con un precio de $(kp_1 + p_2)$ y tratémosla como un solo output.

En la figura 3-10 se representan tres de las curvas de una familia de curvas de transformación de productos. Cuanto más lejos está la curva del origen, mayor es el input de X al que corresponde:

$$x^{(3)} > x^{(2)} > x^{(1)}$$

La pendiente de la tangente a un punto de una curva de transformación de productos es la relación a que debe reducirse Q_2 para obtener más Q_1 (o reducir Q_1 para obtener Q_2) sin variar el input de X.

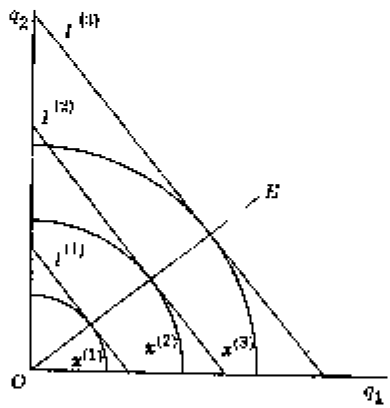


FIGURA 3-10

Se denomina *relación de transformación de productos* (RTP) a la pendiente anterior afectada de signo negativo:

$$RTP = -\frac{dq_2}{dq_1} \tag{3-46}$$

Tomando la diferencial total de (3-44), tenemos:

$$dx = h_1\, dq_1 + h_2\, dq_2$$

Y cómo $dx = 0$, para movimientos a lo largo de una curva de transformación de productos,

$$RTP = -\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{h_1}{h_2} \tag{3-47}$$

La RTP en un punto de una curva de transformación de productos es igual a la razón del coste marginal de Q_1 y de Q_2 en términos de X, en aquel punto.

Alternativamente, la *RTP* puede expresarse en términos de las *PMa*. Aplicando la regla de la función inversa:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} = \frac{1}{h_1} \qquad \frac{\partial q_2}{\partial x} = \frac{1}{h_2} \tag{3-48}$$

Sustituyendo (3-48) en (3-47),

$$RTP = -\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\partial q_2/\partial x}{\partial q_1/\partial x} \tag{3-49}$$

La *RTP* es igual a la razón de la *PMa* de X en la producción de Q_2 y la *PMa* de X en la producción de Q_1. Si ambas *PMa* son positivas, como exige la actuación racional, las pendientes de las curvas de transformación de productos son negativas, y la *RTP* positiva.

El sistema de curvas de transformación de productos de la figura 3-10 está generado por la función de producción implícita

$$q_1^2 + q_2^2 - x = 0$$

Las curvas de transformación de productos son círculos concéntricos:

$$x^0 = q_1^2 + q_2^2$$

con $RTP = q_1/q_2$. Como $q_1, q_2 > 0$, las pendientes de las curvas de transformación de productos son negativas, y la *RTP* siempre positiva.

Maximización condicionada del ingreso. — Si el empresario vende sus outputs a precios fijos, su ingreso viene dado por la ecuación lineal,

$$I = p_1 q_1 + p_2 q_2 \tag{3-50}$$

donde p_1 y p_2 son los precios de Q_1 y Q_2 respectivamente. La línea de igual ingreso es, para el ingreso, la contrapartida de una línea isocoste, y se define como el lugar geométrico de las combinaciones de outputs que proporcionan un ingreso determinado. En la figura (3-10) se representan tres de las líneas de un sistema de líneas de iso-ingreso. Son rectas paralelas con pendientes iguales a la razón de los precios de los outputs $(-p_1/p_2)$ con signo negativo.

Para resolver el problema de maximización condicionada, de un empresario que desea maximizar el ingreso para un input específico de X, formemos la función

$$W = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \mu\,[x^0 - h(q_1, q_2)] \tag{3-51}$$

donde μ es un multiplicador de Lagrange, indeterminado, e igualemos a cero sus derivadas parciales

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1 - \mu h_1 = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2 - \mu h_2 = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mu} = x^0 - h\,(q_1, q_2) = 0$$

Pasando a la derecha los segundos términos de las dos primeras ecuaciones, y dividiendo la primera por la segunda,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{h_1}{h_2} = RTP \tag{3-52}$$

o sustituyendo, de (3-48),

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\partial q_2/\partial x}{\partial q_1/\partial x} = RTP \tag{3-53}$$

La *RTP* debe ser igual a la razón, fija, de los precios. En términos geométricos, la curva especificada de transformación de productos debe ser tangente a una línea de igual ingreso.

Las condiciones de primer grado pueden también establecerse como sigue,

$$\mu = \frac{p_1}{h_1} = \frac{p_2}{h_2}$$

o sustituyendo, de (3-48)

$$\mu = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} = p_2 \frac{\partial q_2}{\partial x}$$

El valor de la *PMa* de X en la producción de cada output debe ser igual a μ, la derivada total de I con respecto a x.[15]

15. La diferencial total de (3-50) es

$$dI = p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2$$

o sustituyendo $p_1 = \mu h_1$ y $p_2 = \mu h_2$,

$$dI = \mu(h_1\,dq_1 + h_2\,dq_2)$$

Dividiendo esto por la diferencial total de (3-44), la derivada total de I con respecto a x es

$$\frac{dI}{dx} = \frac{\mu(h_1\,dq_1 + h_2\,dq_2)}{h_1\,dq_1 + h_2\,dq_2} = \mu$$

Y se llama la productividad del ingreso marginal de X.

La condición de segundo grado exige que el Hessiano orlado relevante sea positivo:

$$\begin{vmatrix} -\mu h_{11} & -\mu h_{12} & -h_1 \\ -\mu h_{21} & -\mu h_{22} & -h_2 \\ -h_1 & -h_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

Desarrollando,

$$\mu\,(h_{11}\,h_2^2 - 2\,h_{12}\,h_1\,h_2 + h_{22}\,h_1^2) > 0$$

y cómo $\mu > 0$,

$$(h_{11}\,h_2^2 - 2\,h_{12}\,h_1\,h_2 + h_{22}\,h_1^2) > 0 \qquad (3\text{-}54)$$

Dando signo negativo a (3-47) y hallando su derivada total, la relación de variación de la pendiente de una curva de transformación de productos es

$$\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = -\frac{1}{h_1^3}\,(h_{11}\,h_2^2 - 2\,h_{12}\,h_1\,h_2 + h_{22}\,h_1^2) \qquad (3\text{-}55)$$

Si se satisface la condición (3-54) el término entre paréntesis de (3-55) es positivo. Y como $h_1 > 0$, la relación de variación de la pendiente de la curva de transformación de productos (3-55) debe ser negativa. Si existen máximos condicionados, las curvas de transformación de productos son cóncavas hacia el origen, como se muestra en la figura 3-10.

El empresario puede querer minimizar la cantidad de X necesaria para obtener unos ingresos determinados. En este caso minimizaría (3-44) sujeto a una limitación del ingreso. Geométricamente, el empresario desea alcanzar la curva de transformación de productos más baja entre las que tienen un punto en común con una determinada línea de igual ingreso. En el caso de la maximización condicionada del ingreso desea alcanzar la línea de igual ingreso más elevada, entre las que tienen en común con una curva dada de transformación de productos. Si las curvas de transformación de producto son cóncavas hacia el origen, cada punto de tangencia de una línea de igual ingreso y una curva de transformación de productos representa la solución de los dos problemas, maximización condicionada del ingreso y minimización condicionada del input. El lugar geométrico de todos estos puntos de tangencia (véase *OE* en la figura 3-10) es la *trayectoria de expansión del output*, concepto de interpretación parecida a la trayectoria de expansión de los inputs de la empresa en la producción simple.

Maximización del beneficio. — Expresemos el beneficio como función de q_1 y q_2:

$$\pi = p_1 q_1 + p_2 q_2 - rh\,(q_1, q_2) \qquad (3\text{-}56)$$

e igualemos a cero sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = p_1 - rh_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = p_2 - rh_2 = 0$$

Trasladando a la derecha los términos que contienen precios, y dividiendo por los costes marginales en términos de X,

$$r = \frac{p_1}{h_1} = \frac{p_2}{h_2} \tag{3-57}$$

o sustituyendo, de (3-48),

$$r = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial x} = p_2 \frac{\partial q_2}{\partial x} \tag{3-58}$$

El valor de la *PMa* de X en la producción de cada output debe ser igual al precio de X.[16] De otra forma, si el rendimiento de X en la producción de cualquiera de los dos artículos excediera su coste, el empresario podría incrementar su beneficio, aumentando el uso de X.

Las condiciones de segundo grado exigen que

$$-rh_{11} < 0 \qquad \begin{vmatrix} -rh_{11} & -rh_{12} \\ -rh_{21} & -rh_{22} \end{vmatrix} > 0$$

Desarrollando el segundo determinante,

$$r^2 [h_{11} h_{22} - (h_{12})^2] > 0$$

Y cómo que $r > 0$, las condiciones de segundo grado pueden establecerse como sigue,

$$h_{11} > 0 \qquad h_{11} h_{22} - (h_{12})^2 > 0 \tag{3-59}$$

que conjuntamente implican que $h_{22} > 0$. El coste marginal de cada output, en términos de X, debe ser creciente.

Consideremos la maximización del beneficio, de un empresario cuyas curvas de transformación de productos están dadas por un sistema de círculos concéntricos. Su beneficio es

$$\pi = p_1 q_1 + p_2 q_2 - r (q_1^2 + q_2^2)$$

16. Siguiendo las derivaciones de (3-53) y la nota 5, no es sorprendente ver que la maximización del beneficio requiere que $r = dI/dx$. La relación en que la aplicación de una unidad adicional de X aumentaría el ingreso del empresario debe igualar su precio.

Igualando a cero las derivadas parciales

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = p_1 - 2rq_1 = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = p_2 - 2rq_2 = 0$$

Las condiciones de primer grado se pueden establecer de la siguiente forma:

$$r = \frac{p_1}{2q_1} = \frac{p_2}{2q_2}$$

Las condiciones de segundo grado (3-59), se cumplen:

$$2 > 0 \qquad 4 - 0 = 4 > 0$$

3-6. Generalización a *m* variables

El análisis de la empresa es fácilmente generalizable a procesos productivos de n inputs y s outputs. La función de producción se formula implícitamente como

$$H(q_1, \ldots, q_s, x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (3\text{-}60\,a)$$

donde (3-60*a*) se supone que tiene derivadas parciales de primero y segundo grado continuas y distintas de cero para todas sus soluciones. Para simplificar la notación hagamos $q_{s+j} = -x_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, y escribamos de nuevo (3-60*a*) como

$$F(q_1, \ldots, q_m) = 0 \qquad (3\text{-}60\,b)$$

donde $m = (n + s)$. Los niveles de input y output se distinguen por el signo. Los niveles de input son negativos y los de output positivos.

Maximización del beneficio. — El beneficio es la diferencia entre el ingreso total resultante de la venta de todos los outputs y el gasto verificado en todos los inputs:

$$\pi = \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \qquad (3\text{-}61)$$

donde $p_{s+j} = r_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, los outputs aportan a (3-61) los términos positivos, y los inputs los negativos. El empresario desea maximizar el beneficio sujeto a las reglas técnicas dadas por su función de producción. Formemos la función

$$J = \sum_{i=1}^{m} p_i q_i + \lambda\, F(q_1, \ldots, q_m) \tag{3-62}$$

e igualemos a cero cada una de sus $(m+1)$ derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial q_i} &= p_i + \lambda F_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} &= F(q_1, \ldots, q_m) = 0 \end{aligned} \tag{3-63}$$

dónde F_i es la derivada parcial de (3-60*b*) con respecto a q_i.

Seleccionemos cualesquiera dos de las primeras m ecuaciones de (3-63), traslademos los segundos términos a la derecha, y dividamos una por otra:[17]

$$\frac{p_j}{p_k} = \frac{F_j}{F_k} = -\frac{\partial q_k}{\partial q_j} \qquad (j, k = 1, \ldots, m) \tag{3-64}$$

Si ambas variables son outputs, (3-64) establece que la *RTP* para cada par de outputs —manteniendo constantes los niveles de los restantes outputs y de todos los inputs—, debe ser igual a la razón de sus precios. *Supongamos que* la j^a *variable es un input y* la k^a un output. Sustituyendo $p_j = r_{j-s}$ y $dq_j/dx_{j-s} = -1$ en (3-64)

$$\frac{r_{j-s}}{p_k} = \frac{\partial q_k}{\partial x_{j-s}} \qquad \text{ó} \qquad r_{j-s} = p_k \frac{\partial q_k}{\partial x_{j-s}} \qquad \begin{matrix} (k = 1, \ldots, s) \\ (j = s+1, \ldots, m) \end{matrix}$$

Los valores de las productividades marginales de un input con respecto a cada output deben ser iguales a su precio. Finalmente, supongamos que las dos variables son inputs. Las condiciones de primer grado se transforman en

$$\frac{r_{j-s}}{r_{k-s}} = -\frac{\partial x_{k-s}}{\partial x_{j-s}} \quad (j, k = s+1, \ldots, m)$$

La *RTS* para cada par de inputs —manteniendo constantes los niveles de los restantes inputs y de todos los outputs—, debe ser igual a la razón de sus precios.

17 En (3-64) se utiliza la regla de la función implícita $F_i/F_j = -\partial q_j/\partial q_i$ (véase sección A-3).

pendientes. En el presente contexto, una actividad puede considerarse como un modo particular de combinar inputs para la producción de un output. En consecuencia, el nivel de actividad j^a (q_j), es la cantidad de output que se produce utilizando la actividad j^a. Las actividades son lineales en el sentido de que la cantidad de input i^a requerido para mantener la actividad j^a (x_{ij}) es una función lineal del nivel de la actividad j^a:

$$x_{ij} = a_{ij} q_j \qquad \begin{matrix} (i = 1, \ldots, m) \\ (j = 1, \ldots, n) \end{matrix} \tag{3-70}$$

El coeficiente a_{ij} es la cantidad de X_i que se requiere para producir una unidad de Q_j. La actividad j^a queda perfectamente descrita, por sus coeficientes, para los m inputs: $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$. La definición de una actividad puede variar de un problema a otro. Las diferentes actividades pueden representar los distintos métodos de producción de un solo artículo, la producción de distintos artículos, o alguna combinación de ambos. Aquí se usa el supuesto de productos distintos; las otras definiciones se deducen fácilmente a partir de ésta.

El concepto de la productividad marginal de un input no tiene sentido dentro de la estructura de la programación lineal. No es posible aumentar un nivel de actividad incrementando la cantidad de un input solo. Deben aumentarse todos los inputs proporcionalmente.

Consideremos el problema de un empresario que tiene cantidades fijas de inputs que desea asignar entre las actividades de modo que se maximice su ingreso. Ejemplo de ello puede ser el caso del granjero que posee cantidades fijas de tierra, trabajo empresarial y horas de tractor, y desea determinar cuál es la plantación óptima de un número de cultivos alternativos. El ingreso del empresario (I) es función lineal de sus niveles de actividad (output):

$$I = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n \tag{3-71}$$

donde p_j es el precio fijo que percibe por una unidad de Q_j.[18] El em-

18. El análisis se generaliza fácilmente al caso en el que el empresario usa $(s - m)$ inputs variables, que adquiere en el mercado. Definamos el ingreso neto proveniente de la producción de una unidad de Q como

$$z_j = p_j - \sum_{i=m+1}^{s} a_{ij} r_i$$

donde r_i es el precio de mercado del input variable . Definamos ahora de nuevo I como el ingreso neto atribuible a los inputs fijos y reemplacemos p_j por z_j en (3-71) presario seleccionará los niveles concretos de actividad que hagan a I lo mayor posible; pero en esta elección no es completamente libre, puesto que la suma de las cantidades del input i^o que usa para comprender las actividades no puede exceder su dotación fija (x_i^0)

$$\begin{array}{l} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \leqq x_1^0 \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n \leqq x_2^0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}q_n \leqq x_m^0 \end{array} \qquad (3\text{-}72)$$

Las restricciones están expresadas como desigualdades débiles, puesto que el empresario es libre de usar menos que su dotación. Aún más, los niveles de actividad deben ser no negativos:

$$q_j \geqq 0 \qquad (j = 1, \dots, m) \qquad (3\text{-}73)$$

Algunos, o todos, pueden ser cero. Un nivel de actividad negativo es matemáticamente posible, pero carece de sentido en un problema económico. El problema de programación lineal del empresario es maximizar (3-71) sujeto a las restricciones dadas por (3-72) y (3-73).

Un método de solución. — Definamos m nuevas variables u_i ($i = 1, 2, \dots, m$) que expresan las cantidades de los m inputs que no se han utilizado para actividades productivas. La definición de estas variables permite transformar (3-72) en un sistema de m ecuaciones con $(n + m)$ variables:

$$\begin{array}{llllll} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n + u_1 & & & & = x_1^0 \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n & + u_2 & & & = x_2^0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}q_n & & & + u_m & = x_m^0 \end{array} \qquad (3\text{-}74)$$

La no utilización de un input se interpreta como una actividad. Sus coeficientes son $+1$ para el input relevante y cero para todos los demás. Los niveles de estas actividades quedan también restringidos a valores no negativos. Si $u_i = 0$, la igualdad de la iésima relación de (3-72) se cumple. Si $u_i > 0$, se cumple la desigualdad. Se supone, que el no utilizar un input no cuesta nada. Por tanto, (3-71) permanece inalterada.

Una serie de valores no negativos de los niveles de actividad que satisfaga (3-74) es *solución practicable* del problema de la programación. Existe un número infinito de soluciones practicables de este sistema de m ecuaciones con $(n + m)$ variables. Igualando a cero n de los niveles de actividad, el sistema puede reducirse a uno de m ecuaciones con

m variables. El sistema reducido anterior es generalmente soluble, o si los valores de todas sus variables son no-negativos, y constituye una *solución practicable básica* del problema de la programación. Formalmente, una solución practicable básica de (3-74) es una solución practicable con un número de niveles positivos de actividad no superior a m. Un número de ellos inferior a m pueden ser positivos puesto que el valor solución para una o más de las variables incluidas puede ser igual a cero. Uno de los teoremas básicos de la programación lineal establece que para cada solución practicable existe una solución practicable básica que da, al menos, un valor igual de I. El problema de la programación puede resolverse encontrando una solución practicable básica de (3-74) que maximice I. El hecho de que el número de soluciones practicables básicas sea infinito, da idea de la importancia de este teorema.

Uno de los métodos de resolución del problema de la programación consiste en hallar todas las soluciones practicables básicas y seleccionar entre ellas aquella que proporcione el valor de I más alto (puede no ser única). No obstante, existe un método mucho más fácil. Empecemos por seleccionar una solución practicable básica. No es difícil. Una posibilidad es hacer $q_j = 0$ ($j = 1, \ldots, n$) y $u_i = x_i^0$ ($i = 1, \ldots, m$). Demos a los niveles de actividad v_j ($i = 1, \ldots, m + n$) los nuevos subíndices ($1, \ldots, m$) que denotan las actividades incluidas en la solución practicable básica inicial y los subíndices ($m + 1 \ldots m + n$) que denotan las excluidas de la solución con niveles igualados a cero. Demos a los índices j de los coeficientes a_{ij} los mismos subíndices y en la misma forma. Utilizando la regla de Cramer (véase Sección A-I), los valores solución de las variables incluidas pueden expresarse como funciones lineales de las dotaciones de los m inputs

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathbf{D}_{ij}}{\mathbf{D}} x_i^0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{3-75}$$

dónde $\mathbf{D}$ es el determinante de la ordenación de los coeficientes de las actividades incluidas y $\mathbf{D}_{ij}$ es el cofactor de a_{ij}. El ingreso total puede expresarse por

$$I = \sum_{j=1}^{m} p_j v_j \tag{3-76}$$

donde, los subíndices de los precios se han cambiado por los mismos, y de la misma forma que en las demás variables, y $p_j = 0$ si v_j es el nivel de una actividad no utilizada.

El paso siguiente consiste en determinar los cambios en niveles de las actividades incluidas y el cambio correspondiente del ingreso total, que resultaría de la desviación de los inputs a una de las actividades excluidas. Sea $v_{m+1} = 1$ y deduzcamos de las dotaciones de factores fijos los requisitos necesarios de inputs. Los modificados niveles de las actividades incluidas vienen dados por

$$v_j^* = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathbf{D}_{ij}}{\mathbf{D}} \left(x_i^0 - a_{i,m+1}\right) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Algunos niveles de actividad se reducirán; otros se incrementarán. El valor del ingreso total de la nueva solución es

$$I^* = \sum_{j=1}^{m} p_j v_j^* + p_{m+1}$$

El cambio del ingreso total con respecto a la introducción de la actividad $(m+1)$ al nivel unitario es

$$\Delta I_{m+1} = I^* - I = \sum_{j=1}^{m} p_j \left(v_j^* - v_j\right) + p_{m+1}$$

De modo parecido se estudia el cambio que experimenta el ingreso total como resultado de la introducción de cada una de las restantes actividades excluidas.

Si $\Delta I_k \leqq 0$ para todas las actividades excluidas, el problema de la programación está resuelto. Si, en una al menos, $\Delta I_k > 0$ el valor del ingreso total puede incrementarse. Seleccionemos una de las actividades excluidas, para la que $\Delta I_k > 0$. El incremento del ingreso total, debido a la introducción de la k^a actividad excluida es $\Delta I_k\, v_k$ .El máximo aumento se obtiene haciendo v_k lo mayor posible. El valor de v_k está restringido por la exigencia de que todos los niveles de actividad sean no negativos. Con la introducción de la k^a actividad excluida, se reducen los niveles de las actividades incluidas para las que $(v_j^* - v_j) < 0$. Calculemos para cada uno de éstos el valor de v_k que anula el de v_j:

$$v_k = - \frac{v_j}{(v_j^* - v_j)}$$

El menor de ellos es el valor máximo permitible de v_k. El nivel de una de las actividades incluidas se reduce a cero, y los de las otras permanecen positivos.

Incluyendo la k^a actividad y excluyendo la que resulte cero como consecuencia de su introducción, se forma una nueva solución practicable básica. Los valores de los niveles de actividad de esta solución se pueden expresar en la forma de (3-75), e igualmente es posible calcular los cambios de ingreso debidos a la introducción de cada una de las variables excluidas de ella. Si $\Delta I_k > 0$ para, al menos, alguna de las actividades excluidas, introduce una actividad excluida y se forma una tercera solución practicable básica. El proceso de cálculo se repite hasta que se alcanza una solución practicable básica con $\Delta I_k \leqq 0$ para todas las actividades excluidas. La solución óptima se alcanzará tras un número finito de repeticiones.

Consideremos como ejemplo, el problema del empresario que puede disponer de dos inputs para la producción de tres artículos distintos. Desea maximizar

$$I = 2\,q_1 + 3\,q_2 + 5\,q_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 1\,q_1 + 2\,q_2 + 4\,q_3 + 1\,u_1 + 0\,u_2 &= 22 \\ 4\,q_1 + 2\,q_2 + 2\,q_3 + 0\,u_1 + 1\,u_2 &= 16 \end{aligned}$$

y $q_1, q_2, q_3, u_1, u_2 \geqq 0$. Sea q_2, q_3 y u_2 igual cero, y empecemos con una solución practicable básica que contiene q_1 y u_1. El determinante relevante es

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

y

$$\begin{aligned} q_1 &= 0\,(22) + 0{,}25\,(16) = 4 \\ u_1 &= 1\,(22) - 0{,}25\,(16) = 18 \\ I &= 2\,(4) + 3\,(0) + 5\,(0) = 8 \end{aligned}$$

Ahora, sea $q_2 = 1$:

$$\begin{aligned} q_1^* &= 0\,(22 - 2) + 0{,}25\,(16 - 2) = 3.5 \\ u_1^* &= 1\,(22 - 2) - 0{,}25\,(16 - 2) = 16{,}5 \\ I^* &= 2\,(3{,}5) + 3\,(1) + 5\,(0) = 10 \end{aligned}$$

La introducción de una unidad de Q_2 aumentará el ingreso total en dos dólares. La introducción de una unidad de Q_2 reduce q_1 en 0,5 y u_1 en 1,5 unidades. El nivel de actividad q_1 se anula para $q_2 = 8$ (4/0,5), y u_1 se anula para $q_2 = 12$ (18/1,5). El valor máximo permisible de q_2 es de 8 unidades, y q_1 queda excluido de la solución practicable básica.

La segunda solución practicable básica contiene q_2 y u_1. El determinante relevante es

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

y

$$\begin{aligned} q_2 &= 0\,(22) + 0{,}5\,(16) = 8 \\ u_2 &= 1\,(22) - 1\,(16) = 6 \\ I &= 2\,(0) + 3\,(8) + 5\,(0) = 24 \end{aligned}$$

Ahora, sea $q_3 = 1$:

$$\begin{aligned} q_2^* &= 0\,(22 - 4) + 0{,}5\,(16 - 2) = 7 \\ u_2^* &= 1\,(22 - 4) - 1\,(16 - 2) = 4 \\ I^* &= 2\,(0) + 3\,(7) + 5\,(1) = 26 \end{aligned}$$

La introducción de una unidad que Q_3 aumenta, en dos dólares, el ingreso total. El nivel de actividad q_2 se anula para $q_3 = 8$ (8/1), y u_2 se anula para $q_3 = 3$ (6/2). El máximo valor permisible de q_3 son tres unidades, y u_2 queda excluido de la solución practicable básica.

La tercera solución practicable básica contiene q_2 y q_3. El determinante relevante es

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

y

$$\begin{aligned} q_2 &= -0{,}5\,(22) + 1\,(16) = 5 \\ q_3 &= 0{,}5\,(22) - 0{,}5\,(16) = 3 \\ I &= 2\,(0) + 3\,(5) + 5\,(3) = 30 \end{aligned}$$

El ingreso total se reduciría en 1 si q_1 o u_1 se igualasen a 1, y en 0,5 si q_2 se igualase a 1. La tercera solución practicable básica es la solución óptima. El empresario producirá 5 unidades de Q_2 y tres de Q_3 y obtendrá un ingreso total máximo de 30 dólares.

El problema dual. — Los problemas de programación lineal se presentan siempre a pares. El problema original es encontrar una serie de valores no negativos para q ($j = 1, \ldots, n$) que maximicen

$$I = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_n q_n$$

sujeto a

$$\begin{aligned} a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \cdots + a_{1n} q_n &\leq x_1^0 \\ a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + \cdots + a_{2n} q_n &\leq x_2^0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} q_1 + a_{m2} q_2 + \cdots + a_{mn} q_n &\leq x_m^0 \end{aligned} \qquad (3\text{-}77)$$

El problema asociado, o dual, es encontrar una serie de valores no negativos para r_i $(i = 1, \ldots, m)$ que minimize

$$Z = r_1 x_1^0 + r_2 x_2^0 + \ldots + r_m x_m^0$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
a_{11} r_1 + a_{21} r_2 + \ldots + a_{m1} r_m &\leqq p_1 \\
a_{12} r_1 + a_{22} r_2 + \ldots + a_{m2} r_m &\leqq p_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n} r_1 + a_{2n} r_2 + \ldots + a_{mn} r_m &\leqq p_m
\end{aligned} \tag{3-78}$$

El problema original contiene n variables y m relaciones; el dual contiene m variables y n relaciones. Ambos sistemas de relaciones contienen los mismos coeficientes, aunque en el problema dual las columnas y las filas están intercambiadas.

Uno de los teoremas básicos de la dualidad establece que si existe un máximo finito para I, existe un mínimo finito para Z, y

$$\text{máx } I = \text{mín } Z$$

Si el problema original tiene sentido, el problema dual existe siempre, pero su interpretación varía de una aplicación a otra. En el ejemplo presente las variables del problema dual se interpretan como los precios imputados de los m inputs. El valor Z es el valor imputado a la dotación de inputs del empresario, y las relaciones del sistema dual establecen que la suma de costes de los inputs necesarios para producir cada output no puede ser menor a su precio. El problema dual no posee una interpretación independiente que tenga sentido para el ejemplo presente. Sin embargo, los valores óptimos de sus variables son de interés.

La solución óptima del problema dual se sigue, fácilmente, de la solución óptima del problema original. Cada relación del problema dual está asociada con una variable del original. Un teorema básico de la dualidad establece que si la j^a variable del sistema original se incluye en la solución máxima, se cumple la igualdad de la j^a relación del sistema dual; y se cumple su desigualdad, si se excluye. La solución practicable básica máxima del sistema original contiene $(m - s)$ actividades de producción y s actividades no utilizadas. Supongamos que las relaciones del sistema dual están numeradas de forma que las primeras $(m - s)$ corresponden a las actividades productivas incluidas en la solución practicable básica máxima, y son por tanto las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a_{11} r_1 + a_{21} r_2 + \ldots + a_{m1} r_m &= p_1 \\
a_{12} r_1 + a_{22} r_2 + \ldots + a_{m2} r_m &= p_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1,m-s} r_1 + a_{2,m-s} r_2 + \ldots + a_{m,m-s} r_m &= p_{m-s}
\end{aligned} \tag{3-79}$$

Es éste un sistema de $(m - s)$ ecuaciones con m variables. El número de variables puede reducirse gracias a otro teorema de la dualidad que establece que si se mantiene la desigualdad de la i^a relación en el sistema original, la variable i^a del problema dual desaparece. Como la solución practicable básica máxima incluye s actividades no-utilizadas en s de las relaciones de (3-77), se mantiene la desigualdad. Por tanto, s de las variables de (3-79) se anulan. Y el sistema de las $(m - s)$ ecuaciones puede generalmente resolverse para las restantes $(m - s)$ variables.

Las ecuaciones relevantes para el ejemplo son

$$\begin{aligned} 2\,r_1 + 2\,r_2 &= 3 \\ 2\,r_1 + 4\,r_2 &= 5 \end{aligned}$$

con la solución $r_1 = 1$ y $r_2 = 0{,}5$. El valor mínimo de Z:

$$Z = 1\ (22) + 0{,}5\ (16) = 30$$

es igual al valor máximo de I.

3-8. Resumen

En el caso de un output y dos inputs variables la función de producción expresa el nivel máximo de output que se puede obtener con cada posible combinación de inputs. Las curvas de productividad se obtienen considerando la cantidad de uno de los inputs variables como un parámetro y expresando el output en función de la cantidad del otro. Una isocuanta es el lugar geométrico de todas las combinaciones de inputs que proporcionan un nivel específico de output.

El empresario puede querer maximizar su nivel de output para un coste dado, o minimizar el coste de producir un nivel dado de output. Las condiciones de primer grado de ambos problemas requieren que la relación técnica de sustitución entre los inputs sea igual a la razón de sus precios. En términos gráficos, en los dos casos se requiere la tangencia de una línea isocoste con una isocuanta. El lugar geométrico de tales puntos de tangencia es la trayectoria de expansión de la empresa. El empresario puede permitir que varíen los niveles de output y de coste y maximizar su beneficio. Las condiciones de primer grado requieren que el valor de la productividad marginal física de cada input sea igual a su precio. Las condiciones de segundo grado requieren que las productividades marginales de ambos inputs sean decrecientes.

Dadas la función de producción del empresario, la ecuación de coste, y la función de la trayectoria de expansión, el coste total puede expresarse en función del nivel de output. A corto plazo, el coste de los inputs fijos debe pagarse independientemente del nivel del output. La condición de primer grado para la maximización del beneficio obliga al empresario a igualar su coste marginal al precio de venta de su output. La condición de segundo grado requiere que aquel coste marginal sea creciente. A largo plazo, el empresario puede variar los niveles de sus inputs fijos y por tanto es capaz de seleccionar una función de coste a corto plazo determinada. Su función de coste total a largo plazo es la envolvente de sus alternativas funciones de coste total a corto plazo. La maximización del beneficio a largo plazo requiere que el coste marginal, también a largo plazo, sea igual al precio de venta, y que el coste marginal a largo plazo sea creciente.

Si la función de producción del empresario es homogénea de grado uno, se presenta una serie de resultados interesantes. Una variación proporcional de todos los niveles de inputs produce un cambio proporcional del nivel de output y deja inalteradas las productividades marginales de los inputs. El teorema de Euler se ha utilizado para demostrar que el output total se agota íntegramente si se paga a cada input su productividad marginal física. Sin embargo, los supuestos de la maximización competitiva del beneficio se derrumban totalmente, si la función de producción a largo plazo del empresario es homogénea de grado uno.

A menudo se producen conjuntamente, en un solo proceso de producción, dos o más outputs. En el caso más simple, las cantidades de los dos outputs se pueden expresar en función de la cantidad de un solo input. Una curva de transformación de productos es el lugar geométrico de todas las combinaciones de outputs que pueden obtenerse con un nivel de input dado. El empresario puede querer maximizar el ingreso que obtiene de un nivel de input dado. Las condiciones de primer grado requieren que iguale la relación de transformación de productos a la razón de sus precios de output. En términos gráficos, el empresario producirá en aquel punto en el que una línea de igual ingreso sea tangente a una curva determinada de transformación de productos. Si desea maximizar el beneficio, debe igualar el valor de la productividad marginal del input respecto de cada output a su precio.

En el caso general, se utilizan n inputs para la producción de s outputs, y se establece la función de producción en forma implícita. Las condiciones de primer grado para la maximización del beneficio requieren que: 1.º La relación de transformación de productos entre cada par de outputs sea igual a la razón de sus precios; 2.º El valor de la productividad marginal de cada input respecto a cada output es igual al precio del input, y 3.º La relación técnica de sustitución entre cada par de inputs es igual a la razón de sus precios. Es posible calcular los efectos sustitución con respecto a las variaciones de los precios, pero no existe contrapartida del asimétrico efecto-renta del consumidor.

La programación lineal trata los problemas en los que se maximiza (o minimiza) una función lineal sujeta a un sistema de desigualdades lineales. Dentro de este cuadro pueden incluirse muchos problemas de producción. El empresario que posee dotaciones fijas de inputs y desea maximizar su ingreso proporciona un ejemplo. Sus posibilidades de producción están descritas por un número de actividades lineales independientes. Las restricciones de las desigualdades establecen que no puede usar más que su dotación de cada input y que sus niveles de output deben ser no negativos. El método iterativo de solución permite la determinación de niveles óptimos de output en un número finito de pasos. Para cada problema de programación lineal, con sentido, existe un problema dual. En el ejemplo utilizado, los valores óptimos para las variables del dual son los precios imputados a los inputs del empresario.

SELECCIÓN DE CITAS

ALLEN, R. G. D., *Mathematical Economics* (Londres: Macmillan, 1956). El capítulo 18 contiene una exposición matemática de la teoría de la empresa. Dentro del texto se desarrolla el álgebra necesaria.

BRONFENBRENNER, M., y PAUL H. DOUGLAS, *Cross-Section Studies in the Cobb-Douglas Function*, "Journal of Political Economy", vol. 47 (diciembre 1939), pp. 761-785. Una discusión general de la función de producción de Cobb-Douglas.

CARLSON, SUNE, *A Study on the Theory of Production* (Nueva York: Kelley & Millman, 1956). Una exposición de la teoría de la empresa en forma de matemáticas sencillas.

DORFMAN, ROBERT, *Application of Linear Programming to the Theory of the Firm* (Berkeley, Calif.: University of California Press, 1951). Sitúa los problemas de optimización de la empresa dentro del marco de la programación lineal. Se requiere conocimiento del álgebra de matrices. (Trad. al castellano: Aguilar, Madrid.)

DOUGLAS, PAUL H., *The Theory of Wages* (Nueva York: Macmillan, 1934). Incluye aplicaciones prácticas de la función de producción de Cobb-Douglas.

HICKS, J. R., *Value and Capital* (2.ª ed.; Oxford: Clarendon Press, 1946). En los capítulos VI-VII se desarrolla la teoría de la empresa. El análisis matemático está en un apéndice. (Trad. al castellano: Fondo de Cultura Económica, Méjico.)

KOOPMANS, TJALLING C. (ed.), *Activity Analysis of Productions and Allocation* (Nueva York: Wiley, 1951). Una serie de ensayos que tratan aspectos matemáticos avanzados de la programación lineal y del análisis del input-output.

MENGER, K., *The Laws of Return*, en O. Morgenstern (ed.), "Economic Activity Analysis" (Nueva York: Wiley, 1954), pp. 419-482. Un estudio matemático de las diversas formulaciones de la ley de los rendimientos decrecientes.

SAMUELSON, PAUL A., *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). El capítulo IV contiene una exposición matemática de la teoría de la empresa. (Trad. al castellano: El Ateneo, Buenos Aires.)

Capítulo 4

EL EQUILIBRIO DEL MERCADO

Hasta ahora se ha analizado la conducta de consumidores y empresarios bajo el supuesto de que ninguno de ellos puede influir sobre los precios a los que compran y venden. Cada consumidor se enfrenta con unos precios dados, y compra la combinación de artículos que maximiza su utilidad. El empresario se encuentra con precios dados de inputs y outputs y decide producir el nivel de output que maximice su beneficio. Cada uno debe resolver un problema de maximización. El conjunto de todas las acciones individuales de consumidores y empresarios determina los precios que cada uno de ellos, por separado, considera como parámetros. Los precios se determinan en el mercado, donde consumidores y empresarios intercambian bienes. En el mercado de un producto final el consumidor es comprador y el empresario vendedor. Sus papeles se invierten en el mercado de un input primario, tal como el trabajo. Algunos inputs son output de otras empresas. El trigo es un input para la industria harinera pero un output para la agricultura. En los mercados de tales bienes intermedios, ambos, compradores y vendedores, son empresarios. El análisis del equilibrio del mercado trata de describir la determinación del precio de mercado y la cantidad comprada y vendida. El capítulo presente se limita a la conducta en un mercado único.

En la Sección 4-1 se esbozan los supuestos básicos y las características de un mercado de competencia perfecta. En la Sección 4-2 se deducen las funciones de demanda total. En 4-3 se obtienen las funciones de oferta total a largo, a corto y a muy corto plazo. Esta sección contiene también una discusión sobre las economías externas y las diseconomías. En la Sección 4-4 se usan las funciones de demanda y de oferta para la determinación del equilibrio en el mercado de productos. En la Sección 4-5 se aplica el análisis al caso de empresas separadas en el espacio y a problemas de impuestos. En la 4-6 se extiende el análisis del equili-

MENGER, K., *The Laws of Return*, en O. Morgenstern (ed.), "Economic Activity Analysis" (Nueva York: Wiley, 1954), pp. 419-482. Un estudio matemático de las diversas formulaciones de la ley de los rendimientos decrecientes.

SAMUELSON, PAUL A., *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). El capítulo IV contiene una exposición matemática de la teoría de la empresa. (Trad. al castellano: El Ateneo, Buenos Aires.)

Capítulo 4

EL EQUILIBRIO DEL MERCADO

Hasta ahora se ha analizado la conducta de consumidores y empresarios bajo el supuesto de que ninguno de ellos puede influir sobre los precios a los que compran y venden. Cada consumidor se enfrenta con unos precios dados, y compra la combinación de artículos que maximiza su utilidad. El empresario se encuentra con precios dados de inputs y outputs y decide producir el nivel de output que maximice su beneficio. Cada uno debe resolver un problema de maximización. El conjunto de todas las acciones individuales de consumidores y empresarios determina los precios que cada uno de ellos, por separado, considera como parámetros. Los precios se determinan en el mercado, donde consumidores y empresarios intercambian bienes. En el mercado de un producto final el consumidor es comprador y el empresario vendedor. Sus papeles se invierten en el mercado de un input primario, tal como el trabajo. Algunos inputs son output de otras empresas. El trigo es un input para la industria harinera pero un output para la agricultura. En los mercados de tales bienes intermedios, ambos, compradores y vendedores, son empresarios. El análisis del equilibrio del mercado trata de describir la determinación del precio de mercado y la cantidad comprada y vendida. El capítulo presente se limita a la conducta en un mercado único.

En la Sección 4-1 se esbozan los supuestos básicos y las características de un mercado de competencia perfecta. En la Sección 4-2 se deducen las funciones de demanda total. En 4-3 se obtienen las funciones de oferta total a largo, a corto y a muy corto plazo. Esta sección contiene también una discusión sobre las economías externas y las disceconomías. En la Sección 4-4 se usan las funciones de demanda y de oferta para la determinación del equilibrio en el mercado de productos. En la Sección 4-5 se aplica el análisis al caso de empresas separadas en el espacio y a problemas de impuestos. En la 4-6 se extiende el análisis del equilibrio estático del mercado, a los mercados de factores. En 4-7 se estudia la estabilidad del equilibrio estático y dinámico, y finalmente, y en la Sección 4-8 se discuten las propiedades del equilibrio en mercados con reacciones retrasadas de la oferta. En todo el capítulo se supone que el mercado que se considera es de competencia perfecta y que los precios permanecen invariables en todos los demás mercados.

4-1. Los supuestos de la competencia perfecta

El mercado de un bien en competencia perfecta satisface las siguientes condiciones: 1.ª Las empresas producen un bien homogéneo, y los consumidores son idénticos desde el punto de vista de los vendedores, en el sentido de que no hay ventajas o desventajas asociadas al hecho de vender a un consumidor particular; 2.ª Ambos, empresas y consumidores, son numerosos, y las ventas o adquisiciones de cada unidad individual son pequeñas en relación al volumen total de transacciones; 3.ª Ambos, empresas y consumidores, poseen información perfecta acerca del precio dominante y de las pujas usuales, y sacan provecho de cada oportunidad para aumentar respectivamente los beneficios y la utilidad; 4.ª La entrada y salida del mercado es asimismo libre para ambos.

La condición primera, asegura el anonimato de empresas y consumidores. Respecto a la empresa, esto equivale a la afirmación de que su producto no se puede distinguir de los productos de las demás: no existen marcas registradas, patentes, marchamos de garantía, etc. Los consumidores no tienen motivo para preferir el producto de una empresa al de otra. La uniformidad de los consumidores garantiza que un empresario venderá al postor más alto. No existen costumbres ni otras reglas institucionales de distribución del output entre los consumidores (tal como la de "Al que llega primero se le sirve antes").

La condición segunda asegura que son muchos los vendedores que se enfrentan a la multitud de compradores. Si las empresas son numerosas, un empresario individual puede aumentar o reducir su nivel de output sin alterar sensiblemente el precio del mercado. La demanda de un artículo por parte de un consumidor individual puede aumentar o disminuir sin tener influencia perceptible sobre el precio. El comprador o vendedor individual actúa como si no tuviese influencia sobre el precio y se limita a ajustarse a lo que considera una situación dada de mercado.

La condición tercera garantiza que existe información perfecta en ambos lados del mercado. Compradores y vendedores poseen una información perfecta respecto a la calidad y naturaleza del producto y al precio dominante. Puesto que no existen compradores mal informados, los empresarios no pueden atreverse a cargar un precio mayor que el dominante. *Por razones análogas, los consumidores no pueden comprar* de ningún empresario a un precio menor que el vigente. Puesto que el producto es homogéneo y todo el mundo tiene una información completa, en un mercado de competencia perfecta debe prevalecer un solo precio. Esto puede probarse suponiendo que, por el contrario, el artículo se vende a dos precios diferentes. Por hipótesis, los consumidores están *enterados de los siguientes hechos*: 1.° El artículo se puede comprar a dos precios diferentes; 2.° Una unidad del artículo es exactamente igual a cualquier otra. Dado que los consumidores maximizan utilidad, no comprarán el artículo de precio mayor. Por tanto, debe prevalecer un precio único.

La última condición asegura, a largo plazo, el libre flujo de recursos entre ocupaciones alternativas. Esto supone que los recursos son móviles y se dirigen siempre a las ocupaciones de las que deriva mayor ventaja. Las empresas se dirigen a los mercados en que pueden hacer beneficios y abandonan aquellos en que incurren en pérdidas. Recursos tales como el trabajo tienden a ser atraídos por industrias cuyos productos tienen gran demanda. Las empresas ineficientes se eliminan del mercado y se reemplazan por las eficientes.

Entre los vendedores sólo prevalece la competencia perfecta si un vendedor individual tiene una influencia imperceptible sobre el precio de mercado y sobre las acciones de los demás. Cada vendedor actúa como si no tuviese influencia. Para que exista competencia perfecta entre los compradores deben mantenerse condiciones análogas. Un mercado es de competencia perfecta si ésta prevalece en ambos lados del mercado, tanto entre los vendedores como entre los compradores. El precio del mercado, que en capítulos anteriores se consideraba un parámetro, es ahora una variable, y su magnitud se determina conjuntamente por las actuaciones de compradores y vendedores.

4-2. Funciones de demanda

En general, la demanda de Q_j del consumidor i depende del precio de Q_j, de los precios de todos los demás bienes, y de su renta:

$$D_{ij} = D_{ij}(p_1, p_2, \ldots, p_m, y_i) \tag{4-1}$$

Su demanda de Q_j puede variar como resultado de un cambio en

p_k $(k \neq j)$, aun cuando p_j permanezca invariable, o en respuesta a cambios de su renta, permaneciendo constantes todos los precios. Para aislar su conducta en el mercado j, se suponen constantes todos los demás precios y la renta del consumidor. Entonces, su demanda de Q_j es sólo función de p_j:

$$D_{ij} = D_{ij}(p_j) \tag{4-2}$$

La cantidad demandada sigue dependiendo de los precios de los demás bienes y de la renta del consumidor, pero ahora estas variables se tratan como parámetros. Omitiendo el bien designado con j en (4-2)

$$D_i = D_i(p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4-3}$$

la demanda total de Q a cualquier precio es la suma de las cantidades demandadas a aquel precio por los n consumidores individuales:

$$D = \sum_{i=1}^{n} D_i(p) = D(p) \tag{4-4}$$

donde D es la demanda total. La forma de (4-4) es el resultado del supuesto de que todos los demás precios y las rentas de los n consumidores son constantes. Puesto que las funciones de demanda de los consumidores individuales son monótonamente decrecientes, la función de demanda total es también monótonamente decreciente (ver Sección 2-4). La forma y posición de la curva de demanda total puede variar debido a un cambio en la distribución de la renta sin que varíe la magnitud de ésta. Si se reduce la renta de un consumidor y se aumenta la de otro exactamente en la misma cantidad, las curvas de demanda individual correspondientes es muy probable que cambien, y la curva de demanda total se verá afectada a menos que los cambios se compensen entre sí.

En términos de los gráficos convencionales, la curva de demanda total es la suma horizontal de las curvas de demanda individuales. Las partes *a* y *b* de la figura 4-1 representan las curvas de demanda de los dos únicos consumidores de un mercado hipotético. La parte *c* es su curva de demanda total que se construye haciendo la distancia OL igual a la suma de las distancias OM y ON.

La función de demanda total o de mercado se enfrenta al conjunto de todos los vendedores. El empresario individual se considera incapaz de influir sobre el precio del mercado. Un cambio de su output produce un movimiento imperceptible a lo largo de la curva de demanda del mercado, y el empresario cree que puede vender cualquier cantidad que produzca al precio corriente. Al empresario individual le parece que la curva de demanda de su output es una línea horizontal dada por

$$p = \text{constante} \tag{4-5}$$

La curva de demanda de mercado no es la suma horizontal de las curvas de demanda con que se enfrentan las empresas individuales.

El ingreso total de las empresas es

$$I = pq$$

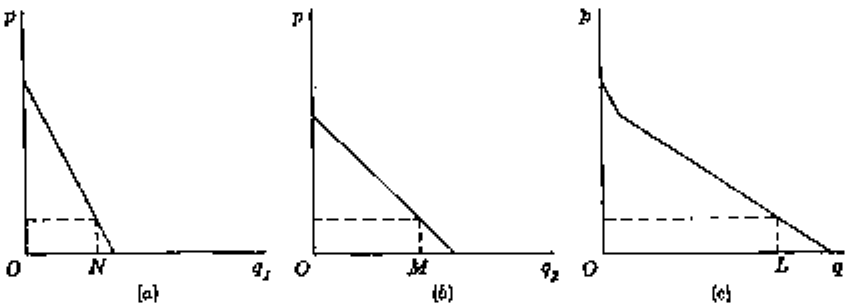


FIGURA 4-1

El ingreso marginal es la relación a que aumenta el ingreso total como resultado de un pequeño aumento de las ventas. En términos matemáticos,

$$\frac{dI}{dq} = p$$

ya que p es una constante. La curva de ingreso marginal con la que se enfrenta la empresa individual es idéntica a su curva de demanda.

4-3. La derivación de las funciones de oferta

Las funciones de coste de las empresas individuales se pueden definir para 1) un período muy corto durante el que no puede variar su nivel de output, 2) un plazo corto durante el que puede variarse el nivel de output pero no la dimensión de la empresa, y 3) un plazo largo en el que todos los factores son variables.

EL PERÍODO MUY CORTO. — Supongamos que el empresario decide cada mañana cuánto producirá aquel día. Su decisión (de output) se lleva a cabo al instante, y el resto del día lo dedica a tratar de vender su output y vende un stock dado del bien. [1] Puesto que ya se ha producido un output q^0, el coste marginal de cualquier output menor que q^0 es cero. A muy corto plazo el output no puede aumentarse más allá de este punto y el coste marginal de outputs mayores puede considerarse infinito. La curva de coste marginal se representa por una línea vertical en este punto.

La empresa maximiza su beneficio vendiendo una cantidad para la que $CMa = p$. Puesto que el CMa de cualquier output menor que q^0 es cero y el CMa de cualquier mayor que q^0 es infinito, la igualdad $CMa =$ no puede satisfacerse, y la empresa aumentará las ventas hasta el punto en el que el precio deje de ser mayor que CMa. Por tanto, venderá todo su output (o sea todo el stock del bien) al precio corriente. [2] Ello maximiza el beneficio, puesto que el precio corriente es el mayor al que puede venderse el output. La cantidad vendida no tiene que responder a los cambios de precio. En general, la función de oferta total establece la cantidad que ofrecerán todos los empresarios en función del precio. Puesto que el output de cada empresa es fijo, la oferta total del bien es también dada y no depende del precio. La curva de oferta es una línea vertical y su distancia del eje de precios es igual a la suma de los outputs de las empresas individuales.

El corto plazo. — La función de oferta de una empresa de competencia perfecta establece la cantidad que producirá en función del precio del mercado y se puede deducir de la condición de primer grado para la maximización del beneficio. La abscisa de un punto de la porción creciente de la curva CMa, correspondiente a un precio dado, mide la cantidad que la empresa ofrecería a aquel precio. La curva de oferta de la empresa, a corto plazo, es idéntica a la parte de la curva CMa a corto plazo que está por encima de la curva $CVMe$. La función de oferta no se define para outputs menores que el que corresponde a la abscisa de la intersección de las curvas CMa y $CVMe$. A todos los precios menores que la ordenada de este punto la cantidad ofrecida sería cero. La curva

1. El presente análisis se simplifica suponiendo que la producción y todos los demás ajustes ocurren en un instante. Más realista puede ser el suponer que el output se produce como un flujo continuo y constante. Siendo la producción un proceso que exige tiempo, un cambio en el nivel de output no puede realizarse inmediatamente. El período muy corto es, por tanto, cualquier lapso de tiempo comprendido entre el cambio en el nivel de los inputs y el correspondiente cambio en el nivel del output.

2. Puesto que el presente análisis es estático, se desprecian los costes de los inventarios.

de oferta de la empresa está constituida por la línea de trazo grueso OA y BC de la fig. 4-2.

El CMa de la i^a empresa a corto plazo es una función de su output

$$CMa_i = \Phi_i{}' \ (q_i) \tag{4-6}$$

La función de oferta de la i^a empresa se deduce de la condición de

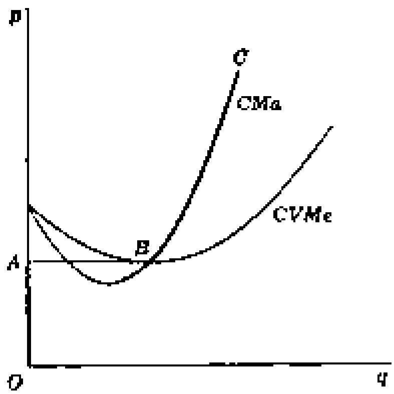


FIGURA 4-2

primer grado para la maximización de su beneficio, haciendo $p = CMa$ y resolviendo (4-6) para $q_i = S_i$

$$\begin{aligned} S_i &= S_i(p) \qquad \text{para } p \geqq \text{ mínimo de } CVMe \\ S_i &= 0 \qquad\quad\ \ \text{para } p < \text{ mínimo de } CVMe \end{aligned} \tag{4-7}$$

La función de oferta total se obtiene sumando las n funciones de oferta individuales. La oferta total es

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i(p) = S(p) \tag{4-8}$$

La curva de oferta total es la suma horizontal de las curvas de oferta individuales.

La condición de segundo grado para la maximización del beneficio requiere que la curva de CMa sea creciente. La función de oferta de la empresa es, por tanto, monótona creciente.[3] La suma horizontal de

3. Puede suceder que las curvas de CMa de las empresas individuales tengan porciones de pendiente negativa en el tramo relevante en que $CMa > CVMe$. Entonces, la función de oferta de la empresa individual será discontinua. En casos excepcionales no es necesario que la función de oferta total sea monótona creciente.

donde q_i es el output de la empresa i^a. Cada empresario maximiza el beneficio con respecto a su propio output. Las funciones de beneficio son

$$\pi_i = I_i - C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4-13}$$

donde $I_i = pq_i$. Diferenciemos π_1 con respecto a q_1 (considerando constantes todas las demás variables), π_2 con respecto a q_2, etc., e igualemos a cero las derivadas parciales resultantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} &= p - \frac{\partial \Phi_1 (q_1, \ldots, q_n)}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} &= p - \frac{\partial \Phi_2 (q_1, \ldots, q_n)}{\partial q_2} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \pi_n}{\partial q_n} &= p - \frac{\partial \Phi_n (q_1, \ldots, q_n)}{\partial q_n} = 0 \end{aligned} \tag{4-14}$$

Las condiciones de segundo grado requieren que

$$\partial^2 \Phi_i (q_1, \ldots, q_n)/\partial q_i^2 > 0$$

para todos ($i = 1, 2, \ldots, n$). Resolviendo el sistema de n ecuaciones dado por (4-14) para $q_1, q_2, \ldots q_n$, y llamando S_i para q_i

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1 (p) \\ S_2 &= S_2 (p) \\ &\cdots\cdots \\ S_n &= S_n (p) \end{aligned} \tag{4-15}$$

donde cada empresario basa su conducta en su propia función CMa. El primer empresario observa los outputs de todas las demás empresas ($q_2^0, q_3, \ldots, q_n^0$) y selecciona el valor de su output q_1 para el que se satisface

$$p - \frac{\partial b_1 (q_1, q_2^0, \ldots, q_n^0)}{\partial q_1} = 0$$

El valor óptimo correspondiente de q_1 puede obligar a los otros empresarios a ajustar sus outputs de acuerdo con sus funciones de CMa. Esto, a su vez, alterará el output óptimo del primer empresario.

Las funciones de oferta (4-15) establecen la oferta óptima de cada empresa en función del precio, después de haber tenido lugar todos estos ajustes. Como antes, la función de oferta total se obtiene sumando las de oferta individuales (4-15):

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i(p) = S(p) \tag{4-16}$$

En presencia de economías o diseconomías externas, la función de oferta total puede tener pendiente positiva o negativa. Las condiciones de segundo grado requieren que las curvas de *CMa* sean crecientes, cuando los outputs de las demás empresas se suponen parámetros dados. Sin embargo, una expansión del output de la industria no solamente cambia los costes totales de las empresas individuales, sino que altera también las funciones de *CMa* individuales. Tanto si las empresas de la

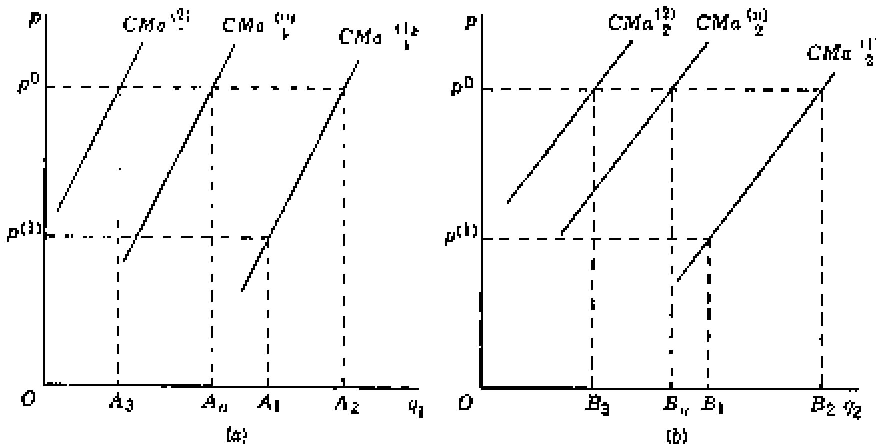


FIGURA 4-3

industria realizan economías como diseconomías externas, las porciones relevantes de sus curvas de *CMa* con pendiente positiva pueden moverse hacia arriba o hacia abajo como resultado de una expansión del output de la industria. La figura 4-3 representa las curvas *CMa* de dos empresas típicas de una industria. Si el precio es $p^{(1)}$, las funciones de *CMa* relevantes de las empresas son $CMa_1^{(1)}$ y $CMa_2^{(1)}$, y sus outputs son OA_1 y OB_1. Supongamos que el precio sube a p^0. La empresa I (figura 4-3*a*) querrá producir OA_2 y la empresa II (figura 4-3*b*), OB_2. Sin embargo, el aumento del output de la empresa I en $A_1 A_2$ unidades eleva la curva de *CMa* de II a $CMa_2^{(2)}$, y el aumento del output II cambia la curva *CMa* de I a $CMa_1^{(2)}$. Puede parecer que las dos empresas producirán OA_3 y OB_3 respectivamente. No obstante, la disminución de sus outputs en relación a sus niveles de output iniciales tenderá a rebajar sus curvas de *CMa*.

Finalmente el movimiento de las curvas *CMa* se detiene, y el output de equilibrio de la industria llega a determinarse cuando $CMa_1^{(n)}$ es la curva de *CMa* relevante de I, cuando II produce OB_n unidades y simultáneamente $CMa_2^{(n)}$ es la curva de *CMa* relevante de II para un output de OA_n unidades de I. El resultado final es un output total más pequeño a un precio más alto. Por tanto, en este caso, la curva de oferta total tiene pendiente negativa.

El hecho de que las empresas estén realizando economías externas no garantiza la deducción de que la pendiente de la función de oferta total sea negativa. Supongamos que las funciones de coste de las n empresas son:

$$\begin{aligned} C_1 &= a_{11} q_1^2 + a_{12} q_2^2 + \ldots + a_{1n} q_n^2 \\ C_2 &= a_{21} q_1^2 + a_{22} q_2^2 + \ldots + a_{2n} q_n^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= a_{n1} q_1^2 + a_{n2} q_2^2 + \ldots + a_{nn} q_n^2 \end{aligned}$$

y que los coeficientes $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ son todos positivos. Si las economías externas prevalecen en la industria, todos los a_{ij} $(i \neq j)$ deben ser negativos. Formando las funciones de beneficio (4-13) e igualando a cero las derivadas parciales pertinentes:

$$\begin{aligned} p - 2\, a_{11} q_1 &= 0 \\ p - 2\, a_{22} q_2 &= 0 \\ &\ldots\ldots \\ p - 2\, a_{nn} q_n &= 0 \end{aligned}$$

Despejando las q y haciendo $q_i = S_i$,

$$S_1 = \frac{p}{2\, a_{11}}$$

$$S_2 = \frac{p}{2\, a_{22}}$$

$$\ldots\ldots$$

$$S_n = \frac{p}{2 a_{nn}}$$

Por tanto, la función de oferta total es:

$$S = \sum_{i=1}^{n} S = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{a_{22}} + \ldots + \frac{1}{a_{nn}}\right)$$

Esta función tiene pendiente positiva a pesar de las economías externas

4-4. Equilibrio del mercado de un bien

EQUILIBRIO A CORTO PLAZO. — Puede considerarse que las fuerzas del mercado que determinan el precio y la cantidad vendida se manifiestan a través de las funciones agregadas de demanda y oferta. La pendiente de la función de demanda $[D'(p)]$ es siempre negativa. La pendiente de la función de oferta $[S'(p)]$ es siempre positiva en ausencia de economías externas. Mientras no se diga otra cosa, se supondrá que $S'(p)$ es positiva.

Imaginemos que los compradores y los vendedores llegan al mercado sin conocimiento previo de cuál llegará a ser el precio dominante. Puesto que el bien es homogéneo, debe prevalecer un precio único. En el punto de equilibrio la cantidad demandada debe igualarse a la cantidad ofrecida:

$$D(p) - S(p) = 0 \tag{4-17}$$

Si para algunos $p = p^0$, no se mantiene la igualdad anterior, los deseos de compradores y vendedores son inconsistentes: o los compradores desean comprar más que lo que los vendedores ofrecen, o los vendedores ofrecen más de lo que los compradores desean adquirir. La igualdad de (4-17) es necesaria y suficiente para que los deseos de compradores y vendedores sean consistentes.

Supongamos que la producción es instantánea y que los productores llegan al mercado sin ningún output actual. Cuando se abre el mercado al intercambio, los compradores y vendedores empiezan a pujar y tratan de formalizar contratos que les sean favorables. Siempre que un comprador o un vendedor contratan, se reservan el derecho de "recontratar" con cualquier persona que les haga una oferta más favorable. De este modo se permite romper los contratos existentes. Supongamos que un consumidor hace una puja inicial y ofrece por el bien un precio de p^0 dólares. Este precio se registra y hace público por un corredor que es observador imparcial del proceso comercial. Imaginemos que el precio inicial es más bajo que el de equilibrio. Compradores y vendedores tratarán de contratar entre sí al precio p^0. Los consumidores que desean comprar a este precio encuentran que la cantidad ofrecida no es suficiente para satisfacer sus deseos, o sea los vendedores no quieren contratar una cantidad tan grande como desean los compradores. Algunos de los consumidores que no han podido satisfacer su demanda, se verán inducidos a subir sus pujas con la esperanza de atraerse los vendedores de otros consumidores. Tan pronto como este precio más alto $p^{(1)}$ se registra y hace público por el corredor, los vendedores rompen sus anteriores contratos y los rehacen de nuevo al precio más alto. A medida que se ofrecen precios mayores, declina la cantidad demandada, ya que los consumidores marginales se apartan del mercado y cada consumidor demanda menos. Simultáneamente, aumenta la cantidad ofrecida por los vendedores. El proceso de recontrataciones continúa mientras el precio anunciado por el corredor está por debajo del equilibrio, o sea mientras la cantidad demandada excede a la cantidad ofrecida. Cuando se alcanza el precio de equilibrio, ni consumidores ni productores tienen interés en contratar de nuevo. La recontratación se interrumpe, los empresarios producen y entregan instantáneamente el output que han contratado, y se perfecciona el cambio. Si resulta que el precio inicial arbitrario p^0 excede a p^e (precio de equilibrio), algunos productores no

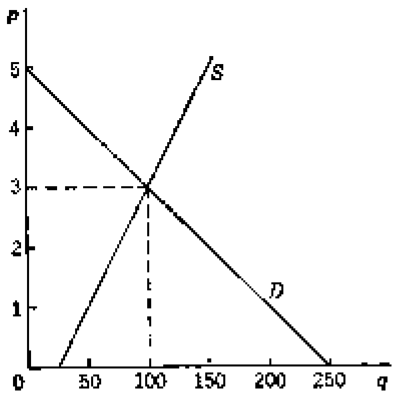


FIGURA 4-4

podrán vender a aquel precio la cantidad que para ellos es óptima. No pueden encontrar consumidores que les convengan sus condiciones. Para deshacerse del producto, los vendedores que no han sido capaces de encontrar compradores al precio inicial, lo reducirán. Los consumidores que han contratado a un precio más alto encontrarán ventajoso el contratar de nuevo. El proceso de recontratación continúa hasta que se alcanza el precio de equilibrio. Cuando se establece p^e, se satisfacen los deseos de compradores y vendedores, y nadie puede beneficiarse de nuevas contrataciones.

La combinación precio-cantidad de equilibrio debe satisfacer las funciones de demanda y de oferta. Esta es la única combinación precio-cantidad para la que los deseos de compradores y vendedores son consistentes entre sí. El precio de equilibrio se determina despejando p en la *condición de equilibrio* (4-17). La cantidad de equilibrio se determina sustituyendo el precio de equilibrio en la función de demanda o en la de oferta. Puesto que la combinación precio-cantidad de equilibrio satisface la curva de demanda y la de oferta a la vez, la operación anterior es equivalente a encontrar las coordenadas del punto de intersección de las curvas de demanda y oferta.

Supongamos que las curvas de demanda y oferta son

$$D = -50\,p + 250 \qquad S = 25\,p + 25$$

Haciendo $D - S = 0$,

$$-50\,p + 250 - 25\,p - 25 = 0$$

y por tanto $\qquad p = 3 \qquad D = S = 100$

Estas funciones están representadas en la figura 4-4.

EQUILIBRIO A LARGO PLAZO. — Si la dimensión de las explotaciones industriales es variable, el equilibrio de las *empresas existentes* en el mercado viene dado por la intersección de la curva de oferta a largo plazo con la correspondiente curva de demanda. Las curvas de oferta y coste a largo plazo incluyen el "beneficio normal", o sea la remuneración mínima necesaria para que la empresa continúe existiendo. Es el beneficio que llega al empresario como pago de los servicios de dirección, por proporcionar la organización, soportar el riesgo, etc. Si la intersección de la curva de demanda y la de oferta a largo plazo tiene lugar a un precio al que las empresas de la industria obtienen un beneficio mayor que el normal, nuevos empresarios se verán inducidos a entrar en la industria. El supuesto de la libre entrada garantiza que estos nuevos *empresarios puedan formar parte de la industria, producir el mismo producto* homogéneo, y poseer la misma información completa que las empresas antiguas. Los nuevos productores añadirán sus ofertas a la existente, y en consecuencia la curva de oferta a largo plazo se desplazará a la derecha. El flujo de nuevos productores se mantendrá mientras en la industria se registren beneficios positivos, y la curva de oferta como consecuencia, continuará desplazándose hacia la derecha hasta que su intersección con la curva de demanda determine un precio para el que los beneficios sean nulos.

En el caso de que las empresas existentes sufran pérdidas, se puede argumentar recíprocamente. Algunas empresas se retirarán de la industria y disminuirá la oferta total; la curva de oferta se desplazará hacia la izquierda. Las empresas continuarán abandonando la industria hasta que la intersección de la curva de demanda con la de oferta determine un precio para el que las pérdidas (y por tanto, los beneficios) sean nulos.

En el equilibrio a largo plazo debe igualarse la demanda a la oferta, y anularse los beneficios. La función de oferta de la empresa i^a es $q_i = S_i\,(p)$. Sea n el número de empresas en la industria. Suponiendo que todas tengan idénticas sus funciones de coste, la función de oferta total es

$$S = nS_i\,(p) = S\,(p) \tag{4-18}$$

Como antes, la función de demanda total es:

$$D = D\,(p) \tag{4-19}$$

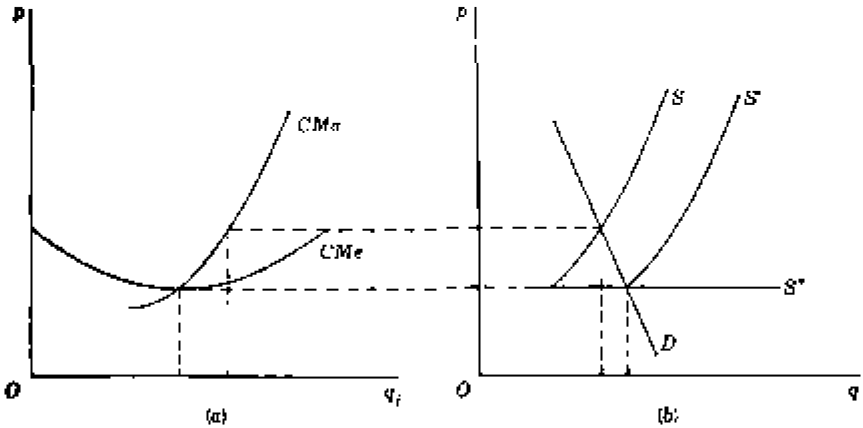


FIGURA 4-5

El equilibrio a largo plazo, además de la igualdad entre la demanda y la oferta, requiere que el beneficio total sea igual a cero:

$$\pi = pS - n\Phi_i\left(\frac{S}{n}\right) = 0 \tag{4-20}$$

donde $\Phi_i(S/n)$ es el coste total a largo plazo de la empresa i^a para un output $q_i = S_i = S/n$. Generalmente, las ecuaciones (4-17) a (4-20) pueden resolverse para las cuatro variables (D, S, p, n). A largo plazo las fuerzas de la competencia perfecta determinan no solamente el precio y la cantidad sino incluso el número de empresas dentro de la industria.

La figura 4-5 ilustra esta argumentación. El lado izquierdo del gráfico muestra las curvas de coste de una empresa típica o "representativa". El lado derecho muestra las curvas de mercado de demanda y de oferta, comprimidas en sentido horizontal. Supuesto que los beneficios son cero, el equilibrio final desde el punto de vista de la industria está en la intersección de las curvas de demanda y oferta. Desde el punto de vista del empresario el equilibrio se obtiene cuando el precio iguala *CMa* y *CMe*. La optimización está garantizada por $p = CMa$, y el beneficio nulo por $p = CMe$. Cada empresa en el equilibrio a largo plazo opera en el punto mínimo de su curva de *CMe*, ya que en dicho punto $CMa = CMe$.

La curva de oferta a largo plazo, S, se define de modo que incluya las ofertas hechas por empresas que ya están en el mercado, pero no las de los productores potenciales. En la situación caracterizada por la curva de oferta S, las empresas están registrando beneficios positivos. Entran nuevas empresas, y la curva de oferta se desplaza a S'. Si se hubiese definido la curva de oferta de modo que incluyese todas las ofertas (hechas por productores actuales y potenciales, como en S^*), la intersección de las curvas de oferta y demanda habría determinado el equilibrio final sin ningún desplazamiento. En (4-18) se da la curva de oferta S para una n fija. S^* se obtiene despejando n en (4-20), sustituyendo su valor en (4-18), y resolviendo entonces el valor de S. En el presente ejemplo es horizontal, pero puede tener pendiente ascendiente si las empresas no poseen idénticas funciones de coste. Puesto que los beneficios son nulos en cualquier punto de S^*, la ordenada de cualquiera de esos puntos (el precio) es el coste medio de producir el output al que corresponde. S^* es, por tanto, la curva *CMe* de la industria.

Las condiciones de costes diferenciales y la renta. — El supuesto de simetría utilizado hasta ahora es conveniente para la exposición, pero no es necesario para alcanzar el equilibrio. Las empresas pueden escoger su propia tecnología, los empresarios pueden diferenciarse en cuanto a su habilidad de organización, y pueden haber construido empresas de distinto tamaño como resultado de las divergentes expectativas que tengan sobre el precio futuro. Algunos empresarios pueden incluso poseer factores escasos, tales como tierra fértil, que no son obtenibles por los demás. Bajo cualquiera de estas condiciones las funciones de coste de todas las empresas no serán idénticas.

Supongamos que hay dos tipos distintos de empresas. Sus curvas de *CMe* y de *CMa* a largo plazo respectivas se indican en los apartados *a*) y *b*) de la figura 4-6. El apartado *c*) muestra la curva de oferta de la industria y cinco curvas hipotéticas de demanda. La curva de oferta se basa en el supuesto de que hay cincuenta empresas en cada una de las dos categorías anteriores. Supongamos que el número de empresas de cada categoría no se puede aumentar. Por ejemplo, supongamos que el número de productores de costes bajos (categoría I) está determinado inalterablemente por la cantidad de ciertos recursos escasos tales como tierra fértil. Por tanto, en la categoría I no pueden entrar nuevas empresas, aunque las ya existentes estén realizando beneficios.

Consideremos la curva de demanda D_4. Cada empresa de bajo coste produce un output de 15 unidades, y cada una de las otras uno de 10 unidades. Las últimas operan en el punto mínimo de sus curvas *CMe* y obtienen beneficios normales. Cada empresa de bajo coste obtiene un beneficio unitario de *NM* por encima de lo normal. Si la curva de demanda se desplaza a D_2, todas las empresas de altos costes (categoría II) abandonarían la industria, pero cada empresa de bajo coste obtendría el mismo beneficio positivo. Obtendrían beneficio positivo aunque la curva de demanda fuese D_1. Con D_3, algunas, pero no todas las empresas

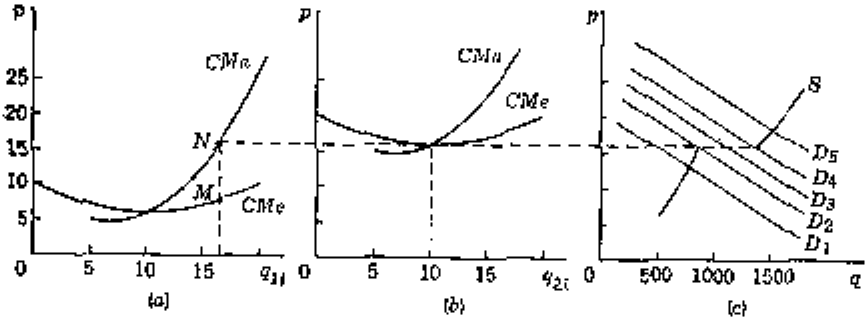


FIGURA 4-6

de costes altos abandonarían la industria. Aquella que se quedase obtendría un beneficio normal. Si la curva de demanda fuese D_5, todas las empresas de la industria obtendrían beneficios mayores que los normales, y un tercer grupo de empresas (que no se muestran en la figura 4-6) podría encontrar provechoso el entrar en la industria. Las empresas de bajo coste seguirían estando en la posición más favorable.

Supongamos que las funciones de coste total de las empresas representativas de las dos categorías son

$$C_{1i} = 0{,}04\, q_{1i}^3 - 0{,}8\, q_{1i}^2 + 10\, q_{1i} \qquad C_{2i} = 0{,}04\, q_{2i}^3 - 0{,}8\, q_{2i}^2 + 20 q_{2i}$$

Las correspondientes funciones de costes medio y marginal son

$$CMa_{1i} = 0{,}12\, q_{1i}^2 - 1{,}6\, q_{1i} + 10 \qquad CMa_{2i} = 0{,}12\, q_{2i}^2 - 1{,}6\, q_{2i} + 20$$
$$CMe_{1i} = 0{,}04\, q_{1i}^2 - 0{,}8\, q_{1i} + 10 \qquad CMe_{2i} = 0{,}04\, q_{2i}^2 - 0{,}8\, q_{2i} + 20$$

Los puntos mínimos de las respectivas curvas de coste medio están en

$q_{1i} = 10$, $p = 6$ y $q_{2i} = 10$, $p = 16$. La curva de oferta de una empresa de bajo coste individual se deduce haciendo $CMa_{1i} = p$:

$$p = 0{,}12\, q_{1i}^2 - 1{,}6\, q_{1i} + 10$$

Hallando el valor de q_{1i} en esta ecuación cuadrática,

$$q_{1i} = \frac{1{,}6 \pm \sqrt{2{,}56 - 0{,}48\,(10 - p)}}{0{,}24}$$

El signo menos que precede a la raíz cuadrada no debe tenerse en cuenta porque corresponde a la situación en la que no se cumple la condición de segundo grado para la maximización del beneficio de la empresa individual. Sustituyendo q_{1i} por S_{1i} la curva de oferta es

$$S_{1i} = 0 \qquad \text{si } p < 6$$

$$S_{1i} = \frac{1{,}6 + \sqrt{2{,}56 - 0{,}48\,(10 - p)}}{0{,}24} \qquad \text{si } p \geqq 6$$

Por razonamiento análogo la curva de oferta de la empresa representativa de alto costo es

$$S_{2i} = 0 \qquad \text{si } p < 16$$

$$S_{2i} = \frac{1{,}6 + \sqrt{2{,}56 - 0{,}48\,(20 - p)}}{0{,}24} \qquad \text{si } p \geqq 16$$

Manteniendo el supuesto de que hay cincuenta empresas en cada categoría, la función de oferta total se describe por la siguiente serie de tres ecuaciones:

$$S = 0 \qquad \text{si } 0 \leqq p < 6$$

$$S = 50\, \frac{1{,}6 + \sqrt{2{,}56 - 0{,}48\,(10 - p)}}{0{,}24} \qquad \text{si } 6 \leqq p < 16$$

$$S = \frac{160}{0{,}24} + \frac{50}{0{,}24}\left[\sqrt{2{,}56 - 0{,}48\,(10 - p)} + \sqrt{2{,}56 - 0{,}48\,(20 - p)}\right] \qquad \text{si } p \geqq 16$$

Supongamos que la curva relevante de demanda es D_1, cuya ecuación es:

$$D = -100\, p + 2050$$

El segmento relevante de la curva de oferta viene dado por

$$S = 50\, \frac{1{,}6 + \sqrt{2{,}56 - 0{,}48\,(10 - p)}}{0{,}24}$$

Haciendo $D = S$ y despejando p y S se obtiene $p = 13$, $S = 750$.[7] Si $p = 13$, cada empresa de bajo coste producirá 15 unidades a un coste medio de 7 dólares. Las empresas de alto coste no producen nada. La cantidad total, que se determina resolviendo las relaciones de oferta y demanda, es $(50)(15) = 750$ unidades. Cada empresa de bajo coste obtiene un beneficio de 90 dólares.

Las empresas de bajo coste pueden producir a un *CMe* más bajo que las otras porque poseen factores escasos, tales como tierra fértil, que las otras no pueden obtener. Si la curva de demanda se corta con la de oferta en un punto en el que algunas empresas obtienen un beneficio mayor que el normal, aquellos que poseen el recurso escaso disfrutan de un beneficio mayor. Es previsible que algunos productores (potenciales), al observar los grandes beneficios de las empresas de bajo coste intenten persuadir a los propietarios del recurso escaso (terratenientes) de que se los alquilen con preferencia a las empresas que antes lo venían empleando. El procedimiento que habitualmente utilizarán será ofrecer un precio más alto por el uso del recurso que el que pagaban las empresas existentes. A su vez éstas reaccionarán igualando las ofertas de aquéllos hasta que la competencia eleve la cantidad pagada por el uso del recurso escaso (la tierra fértil) hasta un punto tal que no permita que se produzcan beneficios diferenciales debido a su empleo. En virtud de esta mecánica los propietarios se apropian del margen de beneficios por encima del normal que realizaban las empresas que usan el recurso escaso. Estas sumas son la *renta* pagada por el empresario por el uso del recurso escaso. Puede concluirse de ello que no existe ninguna ventaja diferencial en ser un productor más eficiente (de bajo coste): el beneficio diferencial desaparece absorbido por la renta extra que debe pagar el productor a bajo coste. En el ejemplo presente, los recursos escasos empleados por cada empresa de bajo coste producen un beneficio de 90 dólares. Si el empresario es al mismo tiempo propietario del recurso escaso, no llevaría a cabo ningún pago actual, y la renta revertiría sobre él. En otro caso, el empresario tendría que pagar 90 dólares por explotar la tierra. La renta se define, de esta forma, como la parte del ingreso de una persona o empresa que está por encima de la cantidad mínima necesaria para mantener a aquella persona o empresa en su ocupación dada. El que se pague al propietario del recurso escaso es

7. Si por simple inspección no resulta obvio cuál es el segmento relevante de la curva de oferta, hagamos $D = S$ para cada uno de los tres segmentos de la curva de oferta, por separado, y despejemos el precio. Solamente uno de los tres precios así calculados estará dentro de intervalo apropiado para cada segmento de la curva de oferta utilizada. Este segmento es el revelante.

intrascendente. Las participaciones distribuidas se distinguen por su función, y no por el individuo a quien correspondan.

4-5. Aplicaciones del análisis

La teoría de la competencia perfecta puede aplicarse a un gran número de casos especiales. En esta sección se consideran dos ejemplos. El primero es una extensión del análisis al caso de empresas distribuidas espacialmente. El segundo contiene un análisis de los efectos de la imposición en la producción en competencia perfecta.

EMPRESAS DISTRIBUIDAS ESPACIALMENTE. — Generalmente se supone que la producción y el consumo tienen lugar en un solo punto del espacio. En realidad existen muchos mercados en los que los productores y consumidores están separados espacialmente. Las localizaciones geográficas y los costes de transporte son, con frecuencia, factores de considerable importancia. A continuación se muestra cómo puede extenderse la teoría de los mercados de competencia perfecta al caso en el que los productores están distanciados en el espacio.

La mayor parte de los mercados centrales están abastecidos por un cierto número de empresas localizadas a alguna distancia. Los mercados lecheros de las grandes ciudades son ejemplos típicos. Los granjeros del área circundante surten el mercado central a distintos costes unitarios de transporte. Si un empresario produce a cierta distancia de este mercado, su coste total es la suma de los costes de producción y transporte:

$$C_i = \varphi_i(q_i) + b_i + \beta_i q_i \tag{4-21}$$

donde β_i es el coste de transportar una unidad de su producto al mercado central. Su beneficio es la diferencia entre su ingreso total y su coste total de producción y transporte.

$$\pi_i = pq_i - \varphi_i(q_i) - b_i - \beta_i q_i \tag{4-22}$$

Igualando a cero la derivada de 4-22,

$$\frac{d\pi_i}{dq_i} = p - \varphi_i'(q_i) - \beta_i = 0$$

o

$$p = \varphi_i'(q_i) + \beta_i \tag{4-23}$$

La condición de primer grado para la maximización del beneficio requiere que el empresario iguale su coste marginal de producción más el coste de transporte unitario al precio de mercado de su producto. La condición de segundo grado, como antes, requiere que su coste marginal de producción sea creciente.

Las curvas de *CMa* y de *CVMe* del empresario experimentan un desplazamiento vertical hacia arriba igual al importe de su coste de transporte unitario (véase fig. 4-7). Su output viene determinado por la intersección de la parte creciente de su curva de $CMa + \beta_i$ y la curva de demanda horizontal. Puesto que el empresario no ofrecerá a precios menores que $CVMe + \beta_i$, su curva de oferta coincide con la porción creciente de su curva de $CMa + \beta_i$ que está por encima de su curva de $CVMe + \beta_i$. A cada precio (al que ofrece una cantidad no negativa) un

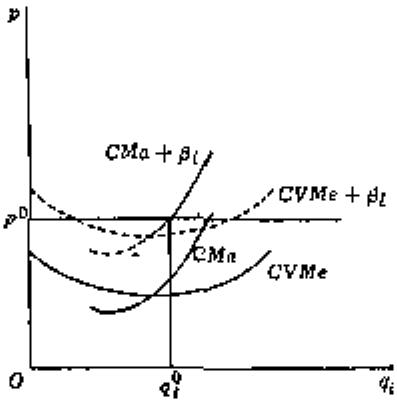


FIGURA 4-7

empresario que no esté localizado en el mercado ofrecerá menos que uno que lo esté.

La función de oferta total del mercado central es la suma horizontal de las curvas de oferta de los n productores individuales:

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i(p) = S(p)$$

dónde $S_i(p)$ es la función de oferta del productor i^o. El equilibrio del mercado se alcanza cuando la oferta se iguala a la demanda.

Supongamos que cincuenta de las cien empresas que ofrecen el artículo Q están localizadas en I y las otras cincuenta en II. El transporte de una unidad de Q desde I al mercado cuesta 8 dólares y desde II, 10 dólares. Todas las empresas poseen las mismas funciones de coste de producción, y los costos totales de las empresas representativas son

$$C_1 = 0{,}5\, q_1^2 + 6\, q_1 \qquad C_2 = 0{,}5\, q_2^2 + 10\, q_2$$

donde los índices 1 y 2, significan empresas localizadas en I y II respectivamente. Las condiciones de primer grado para la maximización del beneficio son $p = q_1 + 6$; $p = q_2 + 10$. Las funciones de oferta se obtienen sustituyendo $q_1 = S_1$ y $q_2 = S_2$ en las condiciones de primer grado y exigiendo la condición de que $S_i = 0$ a menos que $p = CVMe + \beta_i$:

$$\begin{array}{ll} S_1 = 0 & \text{si } 0 \leqq p < 6 \\ S_1 = p - 6 & \text{si } 6 \leqq p \\ S_2 = 0 & \text{si } 0 \leqq p < 10 \\ S_2 = p - 10 & \text{si } 10 \leqq p \end{array} \qquad (4\text{-}24)$$

Un empresario de I no ofrecerá ningún output si el precio del mercado es menor de 6 dólares, y uno de II no ofrecerá ninguno si el precio del mercado es menor que 10 dólares. La curva de $CMa + \beta_i$ de un empresario en I viene dada por $q_1 + 6$ y su $CVMe + \beta_i$ por $0{,}5\, q_1 + 6$. Para precios iguales o superiores a 6 dólares su curva de oferta es $CMa + \beta_i$.

La oferta total para el mercado central viene dada por las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} S = 0 & \text{si } \ 0 \leqq p < 6 \\ S = 50\,(p - 6) = 50\, p - 300 & \text{si } \ 6 \leqq p < 10 \\ S = 50\,(p - 6) + 50\,(p - 10) = 100\, p - 800 & \text{si } 10 \leqq p \end{array} \qquad (4\text{-}25)$$

Si el precio es menor a 6 dólares, la oferta total es cero. Los cincuenta empresarios de I ofrecerán una cantidad positiva si el precio es superior a 6 dólares y los cincuenta empresarios de II ofrecerán igualmente alguna cantidad si éste excede a 10.

Supongamos que la función de demanda total es

$$D = -20\, p + 1600$$

La tercera ecuación de (4-25) nos da el segmento apropiado de la función de oferta. Haciendo $D = S$,

$$-20\, p + 1600 = 100\, p - 800$$
$$p = 20 \qquad S = D = 1200$$

De (4-24) se deduce que cada empresario de I ofrece 14 unidades y gana 98 dólares, y cada empresario de II ofrece 10 unidades y gana 50 dólares. En general, si todos los empresarios producen bajo las mismas condiciones de coste, las magnitudes de output y beneficio son inversamente proporcionales al nivel del coste unitario de transporte.

A largo plazo, la existencia de localizaciones más favorables puede inducir al alza de rentas si el terreno es escaso en las mejores localizaciones. La competencia por los emplazamientos favorables permitirá a los propietarios de los terrenos cargar a los empresarios una renta superior a la de las localizaciones menos ventajosas en una magnitud igual a la diferencia entre los beneficios que se registran en ambas, o sea 48 dólares.[8]

La imposición y la producción en competencia perfecta. — Generalmente, un impuesto sobre las ventas cambia el nivel óptimo de producción del empresario individual. Desplaza la curva de oferta individual y, por tanto, la curva de oferta total como consecuencia. La combinación precio-cantidad de equilibrio se altera. Los impuestos sobre las ventas pueden ser *específicos* o *ad valorem*. El impuesto específico se establece en términos del número de dólares que el empresario tiene que pagar por unidad vendida. El impuesto *ad valorem* en términos de porcentajes sobre el precio de las ventas.

Supongamos que el impuesto sobre la ventas es uno específico de t dólares por unidad. Los costes totales del empresario representativo son:

$$C_i = \varphi(q_i) + b_i + tq_i \tag{4-26}$$

La condición de primer grado para la maximización del beneficio le exige que produzca el nivel de output para el que $CMa = p$:

$$\varphi'(q_i) + t = p$$

o

$$\varphi'(q_i) = p - t \tag{4-27}$$

El empresario iguala el coste marginal de producción más el impuesto unitario al precio. La condición de segundo grado exige que la curva de CMa sea creciente. La función de oferta del empresario se obtiene hallando el valor de q_i en (4-27) y haciendo $q_i = S_i$ para todos los precios mayores o iguales al mínimo de $CVMe$:

$$S_i = S_i(p - t) \tag{4-28}$$

La función de oferta total se obtiene sumando las funciones de oferta individuales

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i(p - t) = S(p - t) \tag{4-29}$$

8 El análisis se puede generalizar fácilmente en caso en que los consumidores estén distribuidos en el espacio.

La oferta total es función del precio neto $(p - t)$ percibido por los vendedores. Si, en ausencia del impuesto sobre las ventas, la oferta total es de S^0 unidades al precio de p^0 dólares, los empresarios ofrecerán la misma cantidad S^0 con un impuesto sobre la venta de un dólar por unidad si el precio pagado por los consumidores es de $p^0 + 1$ dólares. Esto equivale a un desplazamiento vertical hacía arriba en un dólar de la curva de oferta. A cada precio los empresarios desean ofrecer menos que antes. Para determinar la combinación precio-cantidad de equilibrio, hagamos la demanda igual a la oferta,

$$D(p) - S(p - t) = 0$$

y hallemos el valor de p.

De otra forma, si v es el porcentajo sobre el precio de venta del impuesto *ad valorem*, los costes totales son

$$C_i = \varphi(q_i) + b + vpq_i \tag{4-30}$$

Igualando CMa al precio,

$$\varphi'(q_i) + vp = p$$

o

$$\varphi'(q_i) = p(1 - v) \tag{4-31}$$

Por tanto, la función de oferta individual es

$$S_i = S_i[p(1 - v)]$$

y la función de oferta total es

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i[p(1 - v)] = S[p(1 - v)] \tag{4-32}$$

La oferta total es función del precio neto, y el impuesto sobre las ventas implica un desplazamiento hacia arriba de la curva de oferta proporcional a la elevación de la curva de oferta original por encima del eje de las cantidades. De nuevo, la combinación precio-cantidad de equilibrio se determina haciendo la demanda igual a la oferta.

Hagamos que la industria consista de 100 empresas con funciones de coste idénticas

$$C_i = 0{,}1\,q_i^2 + q_i + 10$$

Haciendo CMa igual al precio, despejando q_i, y haciendo $q_i = S_i$,

$$\begin{aligned} S_i &= 0 && \text{si } p < 1 \\ S_i &= 5p - 5 && \text{si } p \geq 1 \end{aligned}$$

La función de oferta total es

$$\begin{array}{ll} S = 0 & \text{si } p < 1 \\ S = 500\,p - 500 & \text{si } p \geqq 1 \end{array}$$

Supongamos que la función de demanda es

$$D = -400\,p + 4.000$$

Igualando la demanda a la oferta, la combinación precio-cantidad de equilibrio resulta:

$$p = 5 \qquad D = S = 2.000$$

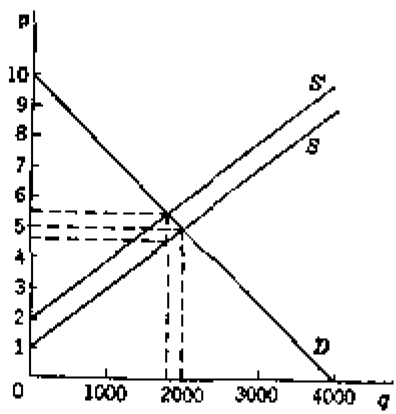


FIGURA 4-8

Supongamos ahora que se establece un impuesto específico de t dólares. La función de coste total representativa pasa a ser la

$$C_i = 0{,}1\,q_i^2 + (1 + t)\,q_i + 10$$

Igualando CMa al precio y resolviendo para $q_i = S_i$

$$\begin{array}{ll} S_i = 0 & \text{si } p < 1 + t \\ S_i = 5\,(p - t) - 5 & \text{si } p \geqq 1 + t \end{array}$$

De aquí que la función de oferta agregada sea

$$\begin{array}{ll} S = 0 & \text{si } p < 1 + t \\ S = 500\,(p - t) - 500 & \text{si } p \geqq 1 + t \end{array}$$

Igualando la demanda a la oferta y hallando el valor de p

$$p = 5 + {}^5/_9\,t$$

Si el impuesto es de 90 centavos por unidad de venta, la combinación precio-cantidad de equilibrio es

$$p = 5{,}50 \qquad D = S = 1.800$$

A consecuencia del impuesto aumenta el precio y disminuye la cantidad vendida. Pero, el alza del precio es menor que el aumento del impuesto por unidad. Los cincuenta centavos de aumento en el precio son la porción del impuesto unitario que se traslada al consumidor; el resto, 40 centavos, es la carga que incide sobre el empresario. El ejemplo se ilustra gráficamente en la figura 4-8. La curva de oferta antes de que se cargue el impuesto es S y después S'. El impuesto son 90 centavos, que es la distancia vertical entre S y S'. El precio pagado sube de 5 dólares a 5,50, y el percibido por los empresarios baja a 4,60. El lector podrá verificar que la proporción del impuesto unitario trasladado al consumidor es mayor cuanto menores sean (algebraicamente) las pendientes de las curvas de demanda y oferta. *Ceteris paribus*, el precio varía directamente, y la cantidad inversamente a la tasa de impuesto.[9]

4-6. El equilibrio en el mercado de factores

Las secciones anteriores se han limitado a mercados de bienes perfectamente competitivos. Pueden alcanzarse conclusiones análogas respecto a mercados de inputs (factores de producción). El mercado de un factor es perfectamente competitivo si: 1.º el input es homogéneo y los compradores son uniformes desde el punto de vista de los vendedores, 2.º los compradores y vendedores son numerosos, 3.º ambos poseen una información completa, 4.º y, asimismo, ambos son libres de entrar o salir del mercado. Los consumidores compran artículos porque, con ellos, obtienen satisfacción. Los inputs se compran a causa de su contribución a la producción. Las curvas de demanda para productos finales, bienes del consumo se derivan de las funciones de utilidad del consumidor en el supuesto de maximización de la utilidad. Las curvas de demanda de inputs se derivan de las funciones de producción bajo el supuesto de maximización del beneficio.

LA FUNCIÓN DE DEMANDA. — La combinación óptima de inputs de un empresario racional satisface la condición de que el precio de cada

9. El análisis previo puede usarse idénticamente para mostrar el efecto de los subsidios, tratando los subsidios como impuestos negativos.

input es igual al valor de su contribución al producto marginal. Supongamos que la función de producción de la empresa i^a es

$$q = f(x_1, x_2) \tag{4-33}$$

Su función de beneficio es

$$\pi = pf(x_1, x_2) - r_1 x_1 - r_2 x_2 \tag{4-34}$$

Igualando a cero las derivadas parciales de (4-34)

$$\begin{aligned} pf_1(x_1, x_2) - r_1 &= 0 \\ pf_2(x_1, x_2) - r_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4-35}$$

Hallando en (4-35) los valores de x_1 y x_2, haciendo $x_1 = D_{i1}$ y $x_2 = D_{i2}$ se obtienen las funciones de demanda de los dos inputs de la empresa i^a: [10]

$$\begin{aligned} D_{i1} &= D_{i1}(r_1, r_2, p) \\ D_{i2} &= D_{i2}(r_1, r_2, p) \end{aligned} \tag{4-36}$$

Generalmente, la demanda de un input depende de su precio, de los precios de los restantes inputs, y del precio del output. La demanda de un input es una *demanda derivada*, ya que depende del precio del producto y se deriva indirectamente, por tanto, de la demanda del producto. Suponiendo que todos los demás precios son constantes, y despreciando los subíndices, la función de demanda de la empresa i^a para un factor particular es

$$D_i = D_i(r) \tag{4-37}$$

donde r es el precio del factor. La función de demanda total se obtiene sumando las funciones de demanda individuales. Si existen m empresas que demandan el input,

$$D = \sum_{i=1}^{m} D_i(r) = D(r) \tag{4-38}$$

La función de oferta. — Los inputs son primarios o producidos. Los inputs producidos son outputs de otras empresas. La función de oferta de un input producido es la función de oferta total de las empresas que lo producen. En la Sección 4-3 se han deducido ya estas funciones. En el caso de inputs primarios, tales como el trabajo, se emplea un procedi-

10. Hay solución si el Jacobiano de (4-35) no se anula. El lector puede darse cuenta de que el Jacobiano es distinto de cero si se cumplen las condiciones de segundo grado de un máximo.

miento diferente. En la Sección 2-5 se supuso que la utilidad es función del ocio y de la renta:

$$U = g\,(T - W,\, y)$$

donde T es la cantidad total de tiempo disponible (la longitud del período para la que se define la función de utilidad) y W la cantidad de trabajo realizado, expresado en horas. Se mostró entonces que el individuo que maximiza su utilidad distribuye su tiempo entre trabajo y ocio de modo que

$$\frac{g_1}{g_2} = r \tag{4-39}$$

donde r es la tasa de salario y g_i es la derivada parcial de la función de utilidad respecto a su argumento i^o. Las g_i dependen de la renta y de la cantidad de trabajo realizado. Puesto que $y = rW$, (4-39) contiene solamente las variables r y W. Despejando W en (4-39) y haciendo $W = S_i$, la función de oferta de trabajo del individuo i^o es

$$S_i = S_i\,(r) \tag{4-40}$$

La función de oferta nos da las cantidades de trabajo que el individuo está dispuesto a llevar a cabo en función del precio de salario. La función de oferta total se obtiene sumando las funciones de oferta individuales. Si a cierta tasa de salario hay n individuos dispuestos a ofrecer trabajo, la función de oferta total es

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i\,(r) = S\,(r) \tag{4-41}$$

La función de oferta puede tener la pendiente negativa o positiva. Si los individuos aprecian mucho el ocio y están más interesados en aumentar éste que en incrementar sus rentas, la curva de oferta de trabajo puede tener pendiente negativa: a mayor salario, menor trabajo realizado.

El equilibrio del mercado. — Dadas las funciones de oferta y demanda de un input, la combinación precio-cantidad de equilibrio se determina acudiendo a la condición de equilibrio $D = S$. Fuerzas de mercado parecidas a las expuestas en la Sección 4-4 cambiarán la situación existente siempre que el precio actual difiera del de equilibrio. Solamente se alcanza el equilibrio cuando la cantidad demandada es igual a la ofrecida. Como en los mercados de productos, ningún participante puede mejorar su posición contratando de nuevo, una vez que se ha alcanzado el equilibrio.

Puesto que la combinación precio-cantidad de equilibrio debe estar en la curva de demanda, debe satisfacer igualmente las condiciones (4-35) de las que se ha deducido dicha curva de demanda. El precio de equi*librio de un input es siempre igual al valor de su producto marginal*, o sea el valor del dólar marginal gastado en cada input es el mismo en cada uso.[11] Esta igualdad es condición necesaria para la maximización del beneficio, y cada empresario puede alcanzar su óptimo en un mercado de competencia perfecta si se cumplen las condiciones de segundo grado para la maximización del beneficio.

4-7. La estabilidad de equilibrio

El precio y la cantidad de equilibrio se determinan por la igualdad entre la demanda y la oferta. El equilibrio se caracteriza por la conformidad de compradores y vendedores con el *status quo:* nadie que participe en el mercado tiene incentivo para modificar su conducta. Sin embargo, la existencia de un punto de equilibrio no garantiza que se consiga. Si el *mercado no está en el equilibrio cuando empieza la contratación, no existe* seguridad de que se establezca el precio de equilibrio. Tampoco hay razones para suponer que el precio inicial será dicho precio de equilibrio. Aun más, la curva de demanda o la de oferta pueden cambiar debido a cambios de las preferencias del consumidor o innovaciones técnicas. Ambos factores tienden a perturbar una situación de equilibrio pero tampoco esta vez hay garantía de que se conseguirá.

En general, una perturbación denota una situación en la que el precio actual es distinto al de equilibrio. Un equilibrio es *estable* si una perturbación redunda en una vuelta al equilibrio e *inestable* si no lo hace.[12] En el estudio del equilibrio en la Sección 4-4 se suponía implícitamente que el equilibrio del mercado era estable.

Estabilidad estática. — Generalmente, una perturbación crea un proceso de ajuste del mercado. Por ejemplo, si el precio actual es menor

11. Existe una formulación análoga en la teoría de la conducta del consumidor. Recordemos que $f_1 = \lambda p_1$ es una de las condiciones de equilibrio del consumidor, en la que f_1 es la utilidad marginal del primer bien y λ es la utilidad marginal del dinero. Entonces $f_1(1/\lambda) = p_1$, es decir, el precio del bien debe igualarse a su utilidad marginal multiplicada por la cantidad adicional de dinero que debe pagarse por unidad adicional de utilidad $(1/\lambda)$.

12. Esta es solamente una de tantas definiciones posibles, y no es muy rigurosa. Véase P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948), pp. 260-262.

que el de equilibrio, el ajuste puede consistir en que algunos compradores aumenten sus ofertas por el bien. El análisis estático hace caso omiso del aspecto temporal del proceso de ajuste y considera sólo la naturaleza del cambio, o sea el que se acerque o aleje del equilibrio.

Definamos

$$E(p) = D(p) - S(p) \tag{4-42}$$

como el exceso de demanda al precio p. En la figura 4-9 el exceso de demanda es positivo al precio p^0, y negativo al precio $p^{(1)}$. Las condiciones de estabilidad se derivan de supuestos sobre la conducta en el mercado de compradores y vendedores. *La condición de estabilidad de*

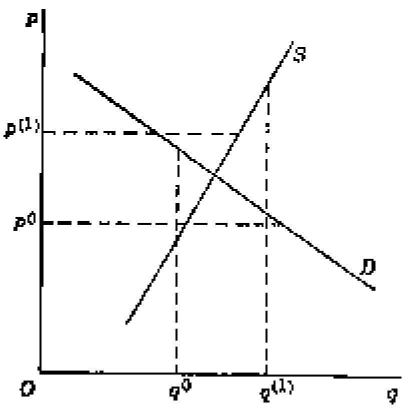


FIGURA 4-9

Walras se basa en el supuesto de que los compradores tienden a subir sus pujas si el exceso de demanda es positivo y los vendedores tienden a bajar sus precios si es negativo. Si este supuesto de conducta es correcto, un mercado es estable si una subida de precio disminuye el exceso de demanda, o sea si

$$\frac{dE(p)}{dp} = E'(p) = D'(p) - S'(p) < 0 \tag{4-43}$$

Llamando p_d al precio al que se demanda una cantidad dada, p_s al precio al que se ofrece la misma cantidad, y haciendo $D = S = q$, se pueden deducir los precios de demanda p_d y de oferta p_s de las funciones de demanda y oferta:

$$p_d = D^{-1}(q)$$
$$p_s = S^{-1}(q)$$

donde D^{-1} y S^{-1} son las inversas de las funciones D y S.[13] El precio del exceso de demanda se define como

$$F(q) = D^{-1}(q) - S^{-1}(q) \tag{4-44}$$

Es la diferencia entre el precio que los compradores están dispuestos a pagar, y los vendedores a pedir, por una cantidad dada. En la figura 4-9 hay un precio de exceso de demanda positivo en q^0 y uno negativo en $q^{(1)}$. El supuesto de conducta subyacente en la *condición de estabilidad de Marshall* establece que los productores tendrán tendencia a aumentar su output cuando el precio de exceso de demanda es positivo, y a bajarlo cuando es negativo. Si el precio del exceso de demanda es positivo, el productor se da cuenta de que los consumidores están ofreciendo un precio mayor que el que él pide y deduce que puede aumentar con provecho la cantidad ofrecida. Para el caso contrario sirve un razonamiento análogo. Un equilibrio es estable en el sentido de Marshall, cuando un aumento de la cantidad reduce el precio del exceso de demanda, o sea si

$$\frac{dF(q)}{dq} = F'(q) = D^{-1\prime}(q) - S^{-1\prime}(q) < 0 \tag{4-45}$$

Puesto que la curva de demanda tiene pendiente negativa, (4-43) y (4-45) se satisfacen si la curva de oferta tiene pendiente positiva.[14] Por tanto, la situación ordinaria de oferta-demanda es estable según ambas definiciones de Walras y Marshall.

Si la curva de oferta tiene pendiente negativa, el equilibrio no puede ser estable de acuerdo con ambas definiciones.[15] Dividiendo ambos lados de (4-45) por $D^{-1\prime}(q) \cdot S^{-1\prime}(q)$:

$$\frac{1}{S^{-1\prime}(q)} - \frac{1}{D^{-1\prime}(q)} < 0 \tag{4-46}$$

En el gráfico usual en el que se representa la cantidad a lo largo del eje horizontal, $D^{-1\prime}(q)$ y $S^{-1\prime}(q)$ son las pendientes de las curvas de

13. Si puede hallarse el valor de x en $y = f(x)$, la solución será $x = f^{-1}(y)$. La función indicada por f^{-1} es la *inversa* de la función $f(x)$.

14. El signo de $D'(p)$ es el mismo que el signo de $D^{-1\prime}(q)$; el signo de $S'(p)$ es el mismo que el de $S^{-1\prime}(q)$. Véase la regla de la función inversa, sección A-2.

15. Las curvas de oferta que pueden tener pendiente negativa son las de oferta de inputs primarios tales como trabajo y las de oferta de productos cuando existan economías o deseconomías externas. Solamente en estos casos pueden darse equilibrios inestables.

demanda y oferta. Por la regla de la función inversa

$$\frac{1}{D^{-1\prime}(q)} = D'(p) \qquad \frac{1}{S^{-1\prime}(q)} = S'(p)$$

Sustituyendo estos valores en (4-46),

$$S'(p) - D'(p) < 0 \tag{4-47}$$

Las condiciones (4-43) y (4-47) no pueden cumplirse simultáneamente. Si un equilibrio es estable en el sentido de Walras, se cumple (4-43) y el equilibrio es inestable en el sentido de Marshall. Si se cumple (4-47) se mantiene la afirmación contraria.[16]

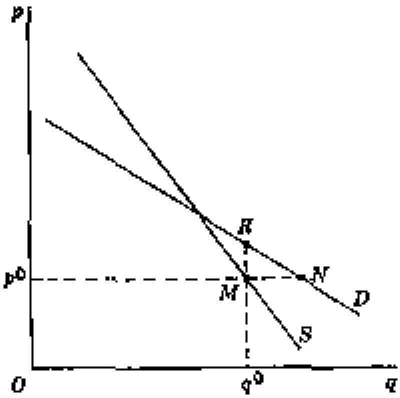


FIGURA 4-10

De (4-47) y (4-43) se sigue que el equilibrio es estable en el sentido de Walras si la curva de oferta tiene mayor pendiente que la de demanda $[S^{-1\prime}(q) > D^{-1\prime}(q)$ ó $D'(p) > S'(p)]$ e inestable en el caso contrario. El equilibrio es estable en el sentido de Marshall si la curva de oferta tiene menor pendiente que la demanda, e inestable en caso contrario. En la figura 4-10 se representan los conceptos anteriores. Al precio p^0 el exceso de demanda es MN; por tanto, la competencia entre los consumidores tenderá a elevar el precio y a disminuir el exceso de demanda. Sin embargo, la cantidad ofrecida al precio p^0 es q^0; el precio del exceso de demanda correspondiente, RM, es positivo. La cantidad producida

16. Si la curva de oferta tiene pendiente positiva no existe contradicción entre las dos condiciones. Cuando se divide (4-45) por $D^{-1\prime}(q)$, $S^{-1\prime}(q)$ se invierte el sentido de la desigualdad de (4-46) y (4-47), puesto que se ha dividido por un número negativo. La desigualdad (4-47) se convierte en $S'(p) - D'(p) > 0$, que es la misma que la de (4-43).

tenderá a aumentar, pero el precio del exceso de demanda también lo hará. El precio y la cantidad actual se alejan del punto de equilibrio.

Una curva de oferta con pendiente negativa puede cortar la curva de demanda en varios puntos. Este es el caso dibujado en la figura 4-11*a*. Cada punto de intersección define uno de equilibrio. Los sucesivos puntos de equilibrio *A*, *B*, *C*, son estables e inestables alternativamente.[17] En *A*, la curva de oferta es más inclinada que la de demanda y el equilibrio es estable. Sólo existirá otro punto de intersección *B* si la curva de oferta se vuelve menos inclinada que la de demanda; por tanto, *B* es inestable. Por razonamiento análogo *C* es estable de nuevo.

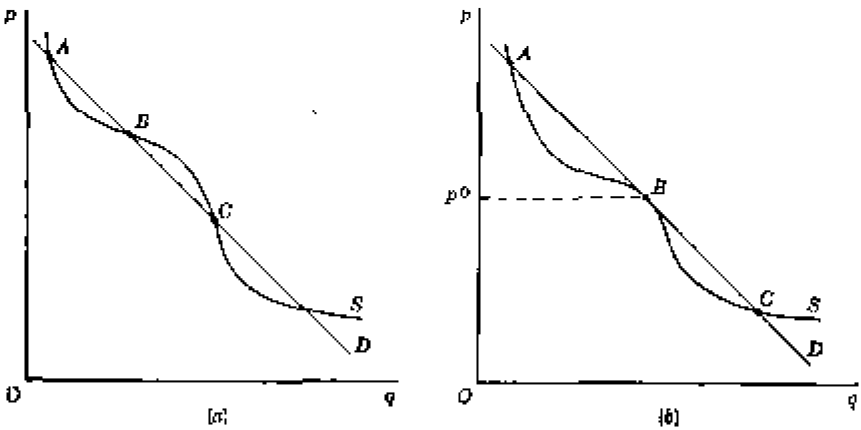


FIGURA 4-11

En casos desusados tales como el punto de equilibrio *B* de la fig. 4-11*b* ya no basta la condición de estabilidad (4-43). El exceso de demanda es positivo tanto a precios menores que p^0 como mayores. El precio tenderá a crecer por desviaciones hacia abajo o hacia arriba del equilibrio. Por tanto, el punto *B* es estable para desviaciones del precio hacia abajo e inestable para desviaciones hacia arriba. El punto *A* es estable, el *B* semiestable y el *C* inestable.

Las afirmaciones acerca de la estabilidad del equilibrio dependen de los supuestos hechos sobre el mecanismo del mercado y la conducta de los que participan en él. *A priori*, no puede decirse cuál de las dos condiciones, la de Walras o la de Marshall, es más plausible en la realidad. En cualquier situación concreta, sólo puede establecerse el punto de

17. El argumento se basa en el supuesto de conducta de Walras. Argumentos análogos pueden constituirse sobre el supuesto de Marshall.

equilibrio después de acumular información empírica acerca de los modelos de conducta de los que participan en el mercado.

ESTABILIDAD DINÁMICA. — Las condiciones de estabilidad estática se formulan en términos de la relación de variación del exceso de demanda respecto al precio, o de la relación de cambio del precio del exceso de demanda respecto a la cantidad. El análisis estático de la estabilidad no intenta investigar el aspecto temporal del proceso de ajuste. En el presente modelo no se esperan ajustes instantáneos. Si el precio inicial no es igual al equilibrio, cambia, y tiene lugar la recontratación. Si el nuevo precio sigue difiriendo del de equilibrio, se ve forzado de nuevo a cambiar. La naturaleza dinámica del modelo de recontratación puede establecerse formalmente del modo siguiente. Cuando se abre el mercado, un consumidor hace una oferta inicial. Esta oferta se registra y publica por el corredor. Una vez anunciado este precio los participantes tienen cierta cantidad de tiempo (digamos, una hora) para contratar entre sí, a este precio. Después de esta hora se permiten nuevas ofertas. Las primeras de ellas se registran y publican por el corredor, y empieza otro período de recontratación de una hora. Este proceso continúa hasta que se alcanza el equilibrio. En cada período de una hora rige un precio, y el análisis de la estabilidad dinámica investiga el curso de este precio a través del tiempo, o sea de periodo en período.[18] El equilibrio es estable en sentido dinámico si el precio converge (o se acerca) al precio de equilibrio con el tiempo; es inestable si con el cambio, el precio se aleja del equilibrio. También puede definirse la estabilidad dinámica en términos de la convergencia de la cantidad ofrecida a la de equilibrio. La primera definición de estabilidad corresponde a la de Walras y la última a la de Marshall.

Suponiendo que el mecanismo de Walras operase en el mercado, un exceso de demanda positivo tendería a aumentar el precio. Esto se expresa matemáticamente como

$$p_t - p_{t-1} = kE\,(p_{t-1}) \qquad (4\text{-}48)$$

donde p_t es el precio en el período t, y k una constante positiva. La ecuación (4-48) expresa un tipo posible de conducta de compradores y vendedores. Suponiendo que hay un exceso de demanda positivo $E(p_{t-1})$ en el período $(t-1)$, expresa el supuesto de que un exceso de demanda

18 Hasta que se consigue el equilibrio, los precios que se registran en cada período son más potenciales que reales. Mientras $D \neq S$, no se ejecuta ninguno de los contratos y continúa la recontratación.

de $E(p_{t-1})$ induce a los compradores a pedir un precio de $p_t = p_{t-1} + kE(p_{t-1}) > p_{t-1}$ en el período siguiente. Supongamos que las funciones de demanda y oferta son

$$D_t = ap_t + b \tag{4-49}$$
$$S_t = Ap_t + B \tag{4-50}$$

El exceso de demanda en el período $(t-1)$ es

$$E(p_{t-1}) = (a - A)\,p_{t-1} + b - B$$

Sustituyendo esta expresión en (4-48),

$$p_t - p_{t-1} = k\,[(a - A)\,p_{t-1} + b - B]$$

o

$$p_t = [1 + k\,(a - A)]\,p_{t-1} + k\,(b - B) \tag{4-51}$$

La ecuación en diferencia de primer grado (4-51) describe el desarrollo temporal del precio sobre la base del supuesto de conducta contenido en (4-48). Dada la condición inicial $p = p_0$ cuando $t = 0$, su solución es:

$$p_t = \left(p_0 - \frac{b - B}{A - a}\right)[1 + k\,(a - A)]^t + \frac{b - B}{A - a} \tag{4-52}$$

En el equilibrio, el exceso de demanda es cero. El precio de equilibrio p^e se puede hallar a partir de (4-49) y (4-50) haciendo $D_t - S_t = 0$. Resolviendo para $p_t = p^e$,

$$p^e = \frac{b - B}{A - a}$$

Por tanto, el término constante de (4-52) es el precio de equilibrio. El equilibrio es estable si el nivel de precios actual se acerca al de equilibrio al aumentar t. El nivel de precio converge hacia p^e sin oscilaciones si $0 < 1 + k(a - A) < 1$. El lado derecho de esta desigualdad no se altera si

$$a < A \tag{4-53}$$

El lado izquierdo no se altera si

$$k < \frac{1}{A - a} \tag{4-54}$$

Si la curva de oferta tiene pendiente positiva ($A > 0$) la condición (4-53) se cumple automáticamente. Si el precio inicial es menor que el de equilibrio su nivel sube con el tiempo: $[p_0 - (b - B)/(A - a) < 0]$, y si es mayor, baja. Si la pendiente de la curva de oferta es negativa, la estabilidad requiere que la curva de demanda $(1/a)$ sea algebraicamente mayor que la pendiente de la curva de oferta $(1/A)$; o sea la curva de oferta debe cortar a la de demanda por encima.[19] Si la curva de oferta corta a la de demanda desde abajo, el equilibrio es inestable y cualquier desviación se va haciendo cada vez mayor. Si k es lo suficientemente grande y $a - A$ es negativo, $1 + k(a - A)$ es también negativo, y el nivel del precio debe oscilar a través del tiempo.[20]

Tanto la estabilidad estática como la dinámica depende de las pendientes de las curvas de oferta y demanda. Además, la estabilidad dinámica depende de la magnitud del parámetro k, que indica el grado a que el mercado se ajusta a una discrepancia entre las cantidades demandadas y ofrecidas por unidad de tiempo. Una k grande indica que compradores y vendedores tienden a "sobreajustarse": si el exceso de demanda es positivo, la puja de los compradores es lo bastante intensa para elevar el precio por encima del nivel de equilibrio. Por ejemplo, supongamos que el precio de equilibrio es 5 dólares y que en un período dado el precio ofrecido por los compradores es de 3 dólares. Los compradores se dan cuenta de que hay un exceso de demanda, pero sobreestiman el ajuste necesario para equilibrar el mercado y ofrecen 6 dólares en el período siguiente. Los vendedores advierten el exceso de oferta y bajan su precio, pero sobreestiman también el grado de ajuste necesario: el precio cae a 4 dólares. Cada ajuste sigue la dirección debida, pero es de magnitud exagerada. El análisis dinámico toma en consideración, de esta forma, la intensidad de las reacciones frente a las perturbaciones.

La estabilidad dinámica del equilibrio se puede analizar gráficamente del siguiente modo. Representando el precio a lo largo del eje horizontal, la línea punteada de la figura 4-12a representa la función de exceso de demanda. Suponiendo que $k < 1$, la línea de trazo continuo representa $kE(p_{t-1})$. En la figura 4-12b la línea de trazo continuo representa el lugar geométrico de los puntos definidos por $p_t = p_{t-1}$. La función

$$p_t = p_{t-1} + kE\,(p_{t-1}) = f\,(p_{t-1}) \tag{4-55}$$

se obtiene sumando las ordenadas (correspondientes a la misma abscisa)

19. Las ecuaciones (4-49) y (4-50) establecen las funciones de demanda y oferta con el precio como variable independiente. En el gráfico habitual, la cantidad se mide a lo largo del eje horizontal y el precio en el vertical. Así, la pendiente de la curva de demanda es $1/a$, y la pendiente de la curva de oferta, $1/A$.

20. Si $1 + k\,(a - A)$ es mayor que -1, (pero menor que cero), la amplitud de las oscilaciones decrece con el tiempo, y el desarrollo temporal se acerca al nivel de equilibrio. Si es menor que -1, el mercado está sujeto a fluctuaciones crecientes del precio.

de las líneas de trazo continuo de las figuras 4-12*a* y 4-12*b*. En la figura 4-12*c* se muestra el resultado. Supongamos que el precio inicial es p_0. En el siguiente período, el precio p_1 viene dado por la ordenada del punto de $f(p_{t-1})$ inmediatamente por encima de p_0. Para calcular el precio del período siguiente, se lleva p_1 al eje horizontal dibujando una línea horizontal de *K* a *L*. El punto *L* está sobre la bisectriz, y la abscisa de cada uno de sus puntos es igual a su ordenada. El precio p_2 se halla dirigiéndose verticalmente hasta *M* en $f(p_{t-1})$.

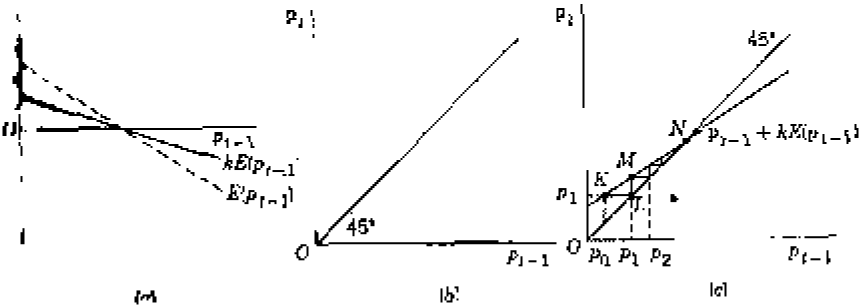


FIGURA 4-12

Los precios sucesivos se determinan de idéntica manera. En el presente ejemplo el nivel del precio converge hacia el de equilibrio dado por la intersección de $f(p_{t-1})$ y la línea bisectriz.[21] La estabilidad del equilibrio depende de la pendiente de la función de exceso de demanda y de la magnitud de *k*. Si en la figura 4-12*a*, la función de exceso de demanda tuviese pendiente positiva, la función cortaría *por debajo* la línea bisectriz y el equilibrio sería inestable. Si la función de exceso de demanda tuviese pendiente negativa, como en la figura 4-12*a*, pero *k* fuese muy grande, tendría pendiente negativa y el nivel del precio oscilaría.

De un modo parecido se puede formular una exposición dinámica de la condición de estabilidad de Marshall. Las conclusiones del análisis estático de la estabilidad restan inalteradas: el equilibrio es estable dinámicamente en los dos sentidos, de Marshall y de Walras, si la función de oferta tiene pendiente positiva; si la tiene negativa, el equilibrio es

[21] Se puede demostrar fácilmente que el punto *N* es el de equilibrio. En *N*, $p_t = p_{t-1}$ (para la línea bisectriz) y $p_t = p_{t-1} + kE(p_{t-1})$. Sustituyendo p_{t-1} por p_t,

$$p_{t-1} = p_{t-1} + kE(p_{t-1})$$

$E(p_{t-1}) = 0$. En el punto *N* el exceso de demanda se anula.

estable según una definición e inestable según otra. Los enfoques estáticos y dinámicos de la estabilidad son fundamentalmente distintos. La estabilidad estática no implica la dinámica, pero ésta sí implica la estática. La razón de esta discrepancia es que el análisis dinámico es un instrumento para la investigación de las propiedades del equilibrio más general. El análisis estático se refiere sólo a la dirección de los ajustes pero descuida la magnitud del ajuste en cada período.

Sea

$$D_t = -0{,}5\,p_t + 100$$
$$S_t = -0{,}1\,p_t + 50$$

y sea $k = 6$.[22] El equilibrio es estático en el sentido de Walras si $D'(p) - S'(p) < 0$. Sustituyendo en las funciones de demanda y oferta, $-0{,}5 - (-0{,}1) = -0{,}4 < 0$. La estabilidad dinámica requiere que $-1 < 1 + k(a - A) < 1$. Sustituyendo los valores apropiados da

$$1 + k\,(a - A) = -1{,}4$$

donde la desigualdad del lado izquierdo, requerida, no se cumple. El mercado presentará oscilaciones explosivas.

4-8. El equilibrio dinámico con ajuste retrasado

Las funciones de oferta de los productores indican la manera cómo ajustan sus outputs al precio vigente. Puesto que la producción requiere tiempo, el ajuste no puede ser instantáneo, sino que sólo es perceptible después de un período de tiempo. Los artículos agrícolas proporcionan muy a menudo ejemplos típicos de ofertas retrasadas. Es posible que el granjero individual base sus planes de producción de acuerdo con el precio del mercado en otoño; su output solamente se materializa durante el siguiente verano.

Ajuste retrasado en un mercado único. — Consideremos como ejemplo de mercado con reacción retrasada de la oferta el mercado del trigo de invierno. Los planes de producción se hacen después de la cosecha. El output correspondiente a estos planes de producción aparece en el mercado un año más tarde. Supongamos que las funciones de demanda y oferta son

22. El alto valor de k indica que los compradores y vendedores reaccionan violentamente ante las perturbaciones.

$$D_t = ap_t + b \tag{4-56}$$
$$S_t = Ap_{t-1} + B \tag{4-57}$$

La cantidad demandada en cualquier período depende del precio en aquel período, pero la cantidad ofrecida depende del precio del período precedente. Se supone que la cantidad ofrecida en el período t es siempre igual a la cantidad en aquel período; o sea, p_t da lugar a que la igualdad de D_t y S_t se verifique tan pronto como S_t aparezca en el mercado. Esto implica que ningún productor tiene stocks sin vender y que ningún consumidor posee una demanda insatisfecha. Por tanto

$$D_t - S_t = 0$$

Sustituyendo por valores de (4-56) y (4-57), resulta:

$$ap_t + b - Ap_{t-1} - B = 0$$

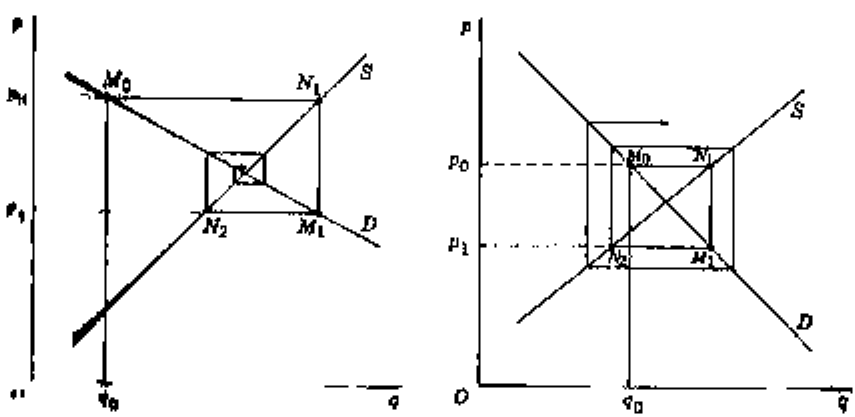
Hallando el valor de p_t

$$p_t = \frac{A}{a} p_{t-1} + \frac{B - b}{a} \tag{4-58}$$

Suponiendo que la condición inicial viene dada por $p = p_0$ cuando $t = 0$, la solución de la ecuación en diferencias de primer grado (4-58) es

$$p_t = \left(p_0 - \frac{B - b}{a - A} \right) \left(\frac{A}{a} \right)^t + \frac{B - b}{a - A} \tag{4-59}$$

La solución (4-59) describe la trayectoria del precio en función del tiempo. En las figuras 4-13a y 4-13b se representan algunas de las posibles trayectorias temporales.



(a) (b)

Figura 4-13

Supongamos que a consecuencia de una perturbación tal como una sequía, la oferta inicial no es igual a la de equilibrio. En la figura 4-13*a* hagamos la oferta igual a q_0. El precio inicial correspondiente es p_0M_0, y esta cantidad es igual a la oferta inicial. En el siguiente período el precio p_0 induce a los empresarios a ofrecer la cantidad p_0N_1. El precio cae instantáneamente a p_1. Entonces, la cantidad demandada es p_1M_1 (que es igual a la cantidad ofrecida en aquel período p_0N_1). En el período siguiente, el precio p_1 induce una oferta de p_1N_2. Este proceso continúa indefinidamente, produciendo una estructura de telaraña. El nivel del precio fluctúa, pero converge hacia el nivel de equilibrio determinado

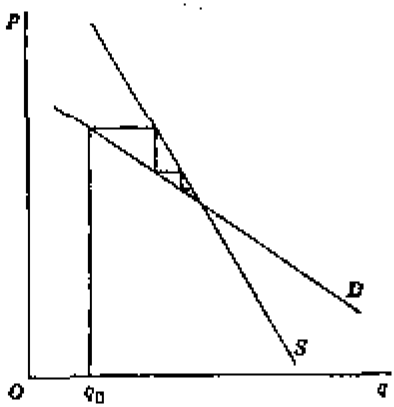


FIGURA 4-14

por la intersección de las curvas de demanda y oferta. En la figura 4-13*b* opera el mismo mecanismo, pero las fluctuaciones de precio tienden a ser mayores cada vez; el mercado está sujeto a oscilaciones explosivas.

De (4-59) se pueden deducir las condiciones de convergencia hacia un precio de equilibrio. El mercado está en equilibrio dinámico si el precio es estable de un período a otro, o sea, si $p_t = p_{t-1}$. El término constante $(B - b)/(a - A)$ de (4-59) es el precio de equilibrio.[23] La pendiente de la curva de demanda $(1/a)$ es siempre negativa. Si la curva de oferta tiene pendiente positiva, A/a es negativo, y el nivel de precio fluctuará. Según sea $|A/a| \lesseqgtr 1$ las oscilaciones tendrán amplitud decreciente, constante o creciente. Por tanto, las oscilaciones aumentarán de amplitud si $|A| > |a|$ o si $\frac{1}{|a|} > \frac{1}{|A|}$. Las oscilaciones aumentan si la pendiente de la curva de demanda es mayor, en valor absoluto, que

23. Hagamos $D_t = S_t$ y $p_{t-1} = p_t$ en (4-56) y (4-57) y hallamos el valor de p_t.

la de la curva de oferta. En caso contrario disminuyen, y son de magnitud constante, si los valores absolutos de las pendientes son iguales. En el caso especial de una curva de oferta con pendiente negativa, A/a es positivo, y el nivel de precio no oscilará, sino que crecerá o decrecerá de modo continuo.[24] Se mantiene la misma condición de antes: que el precio convergerá hacia su valor de equilibrio si la curva de oferta es más inclinada que la de demanda (figura 4-14), y será explosiva hacia arriba o hacia abajo si es menos inclinada.

Las condiciones de estabilidad dinámica no son las mismas que las del caso dinámico simple en el que la estabilidad depende del parámetro k y de las pendientes de las curvas de demanda y oferta. En el caso dinámico simple, compradores y vendedores reaccionan ante el exceso de demanda. En las situaciones de telaraña el exceso de demanda es cero. Los compradores reaccionan ante las ofertas resultantes para los precios que ellos ofrecen. Los vendedores responden ante los precios que resultan para las cantidades que ellos ofrecen en el período siguiente.

Ajuste retrasado en dos mercados interrelacionados. — En el caso de dos mercados interrelacionados puede producirse una interesante conducta oscilatoria. Un ejemplo destacado es el llamado ciclo "maíz-cerdo". El tipo de mercado que se estudia a continuación es una versión simplificada del mismo. No se obtiene la solución completa, sino que el estudio se limita a desarrollar las condiciones bajo las que los dos mercados son estables o inestables.

Demos al maíz el subíndice c y a los cerdos el h. Las funciones de demanda y oferta de maíz son:

$$D_{ct} = a_{11} p_{ct} + b_1 \qquad (4\text{-}60)$$
$$S_{ct} = a_{21} p_{c,t-1} + b_2 \qquad (4\text{-}61)$$

El mercado del maíz tiene las mismas características que se supusieron para el mercado de trigo de invierno. La demanda de maíz en cualquier período depende de su precio en dicho período, y la oferta del mismo es retrasada y depende de su precio en el período anterior. Las funciones de demanda y oferta de cerdos son

$$D_{ht} = a_{31} p_{ht} + b_3 \qquad (4\text{-}62)$$
$$S_{ht} = a_{41} p_{h,t-1} + a_{42} p_{c,t-1} + b_4 \qquad (4\text{-}63)$$

La demanda de cerdos es función de su precio en el período considerado. La oferta depende de los precios de los cerdos y del del maíz en el período

[24] Si coinciden las curvas de oferta y demanda, el precio puede permanecer constante. En este caso no se define un equilibrio único.

precedente. La ecuación (4-63) contiene dos supuestos relativos a la conducta de los productores de cerdos: sus planes de producción para cualquier período t dependen: 1.º del precio de su output en $(t-1)$, y 2.º del precio del maíz en $(t-1)$. El segundo supuesto refleja el hecho de que el maíz es un input importante en la producción del cerdo. Así, el precio del maíz tiende a afectar los planes de producción de los productores del cerdo. Un cambio de $p_{c,t-1}$ da lugar a una variación de la función convencional de oferta de cerdos.

Las ecuaciones (4-60) a (4-63) constituyen un sistema de cuatro ecuaciones en diferencias simultáneas que debe resolverse para obtener las condiciones bajo las que p_{ct} y p_{ht} se acercan a sus valores de equilibrio. Igualando en cada mercado la oferta y demanda totales

$$D_{ct} - S_{ct} = 0$$
$$D_{ht} - S_{ht} = 0$$

y sustituyendo por (4-60), (4-61), (4-62) y (4-63), resulta:

$$a_{11}\, p_{ct} - a_{21}\, p_{c,t-1} = b_2 - b_1 \qquad (4\text{-}64)$$
$$a_{31}\, p_{ht} - a_{41}\, p_{h,t-1} - a_{42}\, p_{c,t-1} = b_4 - b_3 \qquad (4\text{-}65)$$

Las ecuaciones (4-64) y (4-65) describen el comportamiento de los mercados del maíz y cerdos respectivamente. El comportamiento del precio del maíz es independiente del del cerdo, puesto que el último no entra en (4-64). El ciclo del maíz es autosuficiente e independiente de cualquier fluctuación del precio del cerdo. Sin embargo, el precio del cerdo en el período t depende del precio del trigo en el período $(t-1)$. El ciclo del cerdo no es independiente del del maíz. Para encontrar una solución de p_{ht}, es preciso derivar una ecuación que no contenga el precio del maíz. Hallando el valor de $p_{c,t-1}$ en (4-65):

$$p_{c,t-1} = \frac{a_{31}\, p_{ht} - a_{41}\, p_{h,t-1} - b_4 + b_3}{a_{42}} \qquad (4\text{-}66)$$

La ecuación (4-66) es válida para cualquier valor de t; así,

$$p_{ct} = \frac{a_{31}\, p_{h,t+1} - a_{41}\, p_{ht} - b_4 + b_3}{a_{42}} \qquad (4\text{-}67)$$

Sustituyendo (4-66) y (4-67) en (4-64),

$$p_{ht} - \left(\frac{a_{41}}{a_{31}} + \frac{a_{21}}{a_{11}}\right) p_{h,t-1} + \frac{a_{21}\, a_{41}}{a_{11}\, a_{31}}\, p_{h,t-2} = K \qquad (4\text{-}68)$$

donde $K = \{(b_2 - b_1)a_{42} + (b_4 - b_3)(a_{11} - a_{21})\}/a_{11}a_{31}$. El comportamiento del precio en el mercado del cerdo se describe por una ecuación en diferencias de segundo grado, siendo necesarias dos condiciones iniciales para obtener una solución general. La solución general de (4-68) es de la forma

$$p_{kt} = c_1 x_1^t + c_2 x_2^t + Q \tag{4-69}$$

donde c_1 y c_2 son constantes determinadas de acuerdo con las condiciones iniciales y donde Q es la solución particular (véase Sección A-5). El que el desarrollo temporal sea explosivo o convergente depende de las magnitudes de x_1 y x_2, que son las raíces de la ecuación cuadrática deducida de (4-68) despreciando el término constante del lado derecho. *La ecuación homogénea correspondiente a (4-68) es*

$$p_{kt} - \left(\frac{a_{41}}{a_{31}} + \frac{a_{21}}{a_{11}}\right) p_{k,t-1} + \frac{a_{21}\, a_{41}}{a_{11}\, a_{31}}\, p_{k,t-2} = 0 \tag{4-70}$$

Supongamos que la solución es de la forma x^t. Haciendo $p_{kt} = x^t$ en (4-70) y dividiendo todo por x^{t-2},

$$x^2 - \left(\frac{a_{41}}{a_{31}} + \frac{a_{21}}{a_{11}}\right) x + \frac{a_{21}\, a_{41}}{a_{11}\, a_{31}} = 0 \tag{4-71}$$

La solución de la ecuación cuadrática (4-71) es

$$x = \frac{\dfrac{a_{41}}{a_{31}} + \dfrac{a_{21}}{a_{11}} \pm \sqrt{\left(\dfrac{a_{41}}{a_{31}} + \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)^2 - 4\,\dfrac{a_{21}\, a_{41}}{a_{11}\, a_{31}}}}{2}$$

$$= \frac{\dfrac{a_{41}}{a_{31}} + \dfrac{a_{21}}{a_{11}} \pm \left(\dfrac{a_{41}}{a_{31}} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)}{2}$$

Por tanto

$$x_1 = \frac{a_{41}}{a_{31}} \qquad x_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

El desarrollo temporal del precio del cerdo será convergente si el valor absoluto de ambas raíces es menor que la unidad. Esta condición se cumple en los dos mercados si la curva de demanda es menos inclinada que la de oferta. Consecuentemente, *tomados por separado*, los desarrollos temporales de los precios de los dos mercados deben converger. La afirmación $|x_2| < 1$ es la condición necesaria para la estabilidad dinámica del mercado del maíz. La afirmación $|x_1| < 1$ es la condición necesaria para la estabilidad dinámica del mercado de cerdos, considerando constantes los precios del maíz. Si se tienen en cuenta el efecto de los cambios en los precios del maíz, la estabilidad del mercado del cerdo, requiere que se den ambas condiciones a la vez. La estabilidad de dos mercados interrelacionados en conjunto implica la estabilidad de cada uno de ellos por separado, pero la estabilidad del mercado del maíz solamente, no implica la de ambos.

La representación gráfica puede aclarar el análisis. Sea la figura 4-15*a* la representación del mercado del maíz y la 4-15*b* la del mercado del cerdo. Un cambio del precio del maíz altera la curva de oferta de

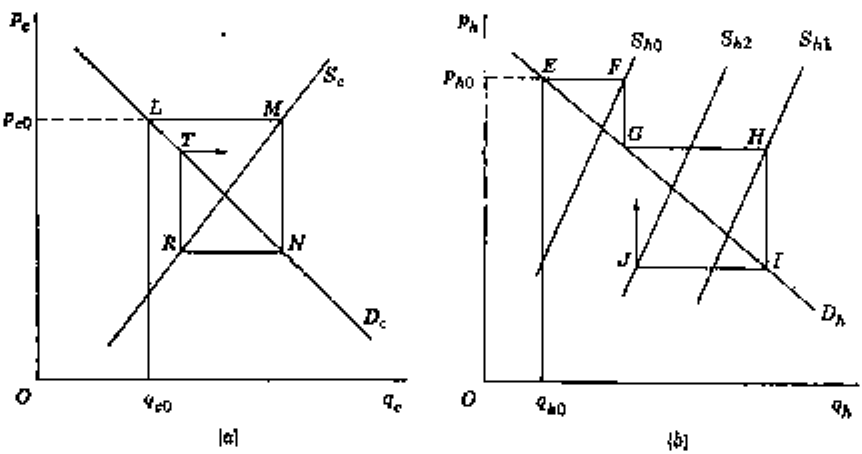


FIGURA 4-15

cerdos del modo indicado por (4-63). Denotemos las cantidades iniciales de los mercados del maíz y cerdo por q_{c0} y q_{h0} respectivamente y los precios iniciales por p_{c0} y p_{h0}.

Supongamos que si el precio del maíz es p_{c0}, la curva de oferta relevante de cerdos es S_{h0}. El movimiento en el mercado del maíz está indicado por las líneas *LM* y *MN* de la figura 4-15*a*. El movimiento correspondiente en el mercado del cerdo es *EF*, *FG*. Pero el precio del maíz ha bajado en la cantidad *MN*. Por tanto, la curva de oferta de cerdos cambia a la posición S_{h1}, y el siguiente movimiento del mercado del cerdo es de *G* a *H* y de *H* a *I*. Al mismo tiempo, la oferta de maíz se reduce en *RN* y su precio se eleva en *RT*. Este incremento en el precio del maíz altera la curva de oferta del cerdo, en dirección contraria, hasta la posición S_{h2}, y la oferta del cerdo se reduce en la cantidad *IJ*. Los resultados anteriores se basan en el supuesto de que en (4-63), a_{h2} es negativo, o sea: cuanto mayor sea el precio del maíz en el período (t—1), más baja será la oferta de cerdos en el período t. Queda así aclarada la conclusión previa de que la estabilidad total requiere la estabilidad de ambos mercados por separado: *si el mercado del maíz fuese inestable*, las fluctuaciones en el precio del maíz tenderían a ser cada vez mayores, y lo mismo ocurriría en los períodos siguientes con la curva de oferta. El mercado de cerdos no podría ser estable. Aunque el mercado del maíz fuese estable, y consiguientemente los sucesivos cambios de la curva de oferta de cerdos fuesen de magnitud decreciente, el precio de los cerdos continuaría mostrando todavía oscilaciones crecientes, si la curva *de demanda de cerdos fuese más inclinada* que la de oferta.

Finalmente, si los productores de cerdos compraran una parte considerable de la oferta total de maíz, es razonable suponer que la demanda del maíz depende de ambos precios, de maíz y de cerdo. Este supuesto aumentaría la complejidad del modelo, pero no alteraría los instrumentos básicos del análisis.[25]

4-9. Resumen

La teoría de la competencia perfecta analiza los factores que determinan el precio y la cantidad en mercados en los que: 1.º el producto es homogéneo y los compradores uniformes; 2.º compradores y vendedores son numerosos; 3.º todos poseen una información completa; 4.º existe entrada y salida libre tanto por parte de los compradores como de los vendedores. *Los que participan en el mercado actúan como si no tuviesen* influencia sobre el precio, y cada individuo lo considera como un parámetro dado.

La oferta y la demanda determinan la cantidad comprada y vendida y su precio. La función de demanda total se obtiene de las funciones de demanda de los consumidores individuales, las que, a su vez, se derivan de las condiciones de primer grado de maximización de utilidad de los consumidores individuales. La función de oferta total se obtiene de las funciones de oferta individuales, que se basan en las condiciones de primer grado de maximización del beneficio de las empresas individuales. El equilibrio se alcanza cuando la demanda iguala a la oferta.

25. Los resultados de la sección 4-8 se basan en el supuesto de que las funciones de demanda y oferta son lineales. Si se relaja este supuesto, la variedad de resultados posibles aumenta considerablemente. Las técnicas analíticas necesarias para tratar casos no lineales son más difíciles y no se pueden estudiar dentro de los límites de este capítulo.

La igualdad entre la demanda y la oferta garantiza que los deseos de compradores y vendedores son consistentes. El análisis de un mercado de competencia perfecta se generaliza al de empresas distribuidas en el espacio y a algunos problemas impositivos.

El análisis de los mercados de factores perfectamente competitivos es parecido al de los mercados de bienes. La combinación precio-cantidad de equilibrio se determina por la demanda y la oferta, y su igualdad asegura la consistencia de los deseos de compradores y vendedores. La función de demanda de un factor se deduce de las condiciones de primer grado de maximización del beneficio de las empresas individuales. La función de oferta de un input primario, tal como trabajo, se deduce de las condiciones de primer grado de maximización de la utilidad de los trabajadores individuales. El equilibrio en un mercado de factores garantiza que el precio de un factor es igual al valor de su productividad marginal.

La existencia de un punto de equilibrio no garantiza su consecución. El análisis de la estabilidad del equilibrio se relaciona con los efectos de las perturbaciones. El equilibrio es estable si la perturbación viene seguida por una vuelta al equilibrio, e *inestable si no lo es. El análisis* estático de la estabilidad considera solamente la dirección de los ajustes que siguen a la perturbación; el dinámico considera también el grado o intensidad de dichos ajustes. Las conclusiones de los análisis estático y dinámico difieren, hasta el punto de que un mercado que es estable de acuerdo con el análisis estático puede ser dinámicamente inestable. Ambos análisis hacen supuestos acerca de la conducta de compradores y vendedores. De acuerdo con el supuesto de la condición de estabilidad de Walras, los compradores y los vendedores reaccionan ante el exceso de demanda. De acuerdo con el supuesto de Marshall, los vendedores reaccionan ante el exceso de demanda. Estos supuestos no son generalmente equivalentes, y su plausibilidad tiene que verificarse empíricamente. En los mercados con reacciones retrasadas de la oferta surgen problemas dinámicos especiales. En mercados de este tipo se supone que ambos, compradores y vendedores, reaccionan ante el precio. Si la función de oferta tiene pendiente positiva, el desarrollo temporal del precio de mercado, oscila, y da lugar a una estructura de telaraña; un equilibrio es estable si la curva de oferta es más inclinada que la de demanda. El análisis puede generalizarse a casos especiales en los que existen dos mercados interrelacionados, donde en parecida forma pueden derivarse las condiciones de estabilidad.

SELECCIÓN DE CITAS

BAUMOL, W. J., *Economic Dynamics* (Nueva York: Macmillan, 1951). El capítulo VII contiene una discusión no matemática de la estática comparativa, la dinámica y el teorema de Cobweb.

BOULDING, K. W., *Economic Analysis* (ed. rev.; Nueva York: Harper, 1948). En las partes I y III se desarrolla en términos no matemáticos el modelo de una economía perfectamente competitiva.

BUCHANAN, N. S., *A Reconsideration of the Cobweb Theorem*, "Journal of Political Economy", vol. 47 (febrero 1939), pp. 67-81. Una ampliación del teorema de Cobweb usando la geometría.

ELLIS, H. S., y WILLIAM FELLNER, *External Economies and Diseconomies*, "American Economic Review", vol. 33 (septiembre 1943), pp. 493-511. Editado también por American Economic Association, "Readings in Price Theory" (Chicago: Irwin, 1952), pp. 242-263. Una aclaración geométrica de estos conceptos.

KNIGHT, F. H. *Risk Uncertainty and Profit* (Boston: Houghton Mifflin, 1921). Editado también por la London School of Economics en 1937. Un análisis no matemático de una economía perfectamente competitiva con especial hincapié en el efecto de la incertidumbre en los beneficios. (Trad. al castellano: Aguilar, Madrid.)

MARSHALL, ALFRED, *Principles of Economics* (8.ª ed.; Londres: Macmillan, 1920). El libro V contiene un análisis no matemático de la oferta y la demanda y de la determinación del equilibrio de mercado. (Trad. al castellano: Aguilar, Madrid.)

SAMUELSON, PAUL A., *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). El capítulo IX contiene una discusión de la estabilidad de mercado. Son necesarios conocimientos de cálculo avanzados. (Trad. al castellano: El Ateneo, Buenos Aires.)

SCHNEIDER, ERICH, *Pricing and Equilibrium* (Londres: William Hodge, 1952). El capítulo IV contiene una discusión en términos geométricos del equilibrio en un solo mercado de competencia perfecta.

STIGLER, GEORGE J., *The Theory of Price* (ed. rev.; Nueva York: Macmillan, 1952). En los capítulos IX-X se desarrollan sin el uso de las matemáticas las teorías de la competencia perfecta. (Trad. al castellano: Revista de Derecho Privado, Madrid.)

CAPÍTULO 5

EL EQUILIBRIO DEL MULTIMERCADO

El análisis de la determinación del precio y de la asignación puede llevarse a cabo en tres etapas de generalización creciente: 1.° el equilibrio de un consumidor o un productor individual; 2.° el equilibrio de un mercado único, y 3.° el equilibrio simultáneo de todos los mercados. El primer tipo de análisis es objeto de los capítulos 2 y 3, y el segundo, del capítulo 4. El presente capítulo se dedica al tercero.

Un análisis teórico contiene datos, variables, y supuestos de conducta que permiten la determinación de valores específicos de las variables, una vez conocidos los datos. Consideremos el análisis de un consumidor individual. Los datos son su función de utilidad, su renta, y los precios de todos los bienes y factores. Las variables son las cantidades de bienes que compre y consuma, y el supuesto de conducta básico es su deseo *de maximizar la utilidad.* El análisis de un productor individual es parecido. Los datos son su función de producción y los precios de todos los bienes y factores. Las variables son las cantidades de inputs que compra y la cantidad de output que produce y vende. El supuesto de conducta es su deseo de maximizar el beneficio. Sin embargo, el análisis de una unidad individual no arroja ninguna luz sobre la determinación de los precios en competencia perfecta, puesto que todos los precios se consideran parámetros.

El análisis del equilibrio en un mercado único es algo más general. Como resultado de la maximización por parte de un gran número de consumidores y productores, se determina un precio único. En el análisis del equilibrio del mercado de un bien los datos son las funciones de *utilidad y producción de todos los consumidores y productores,* las rentas de todos los consumidores, los precios de todos los factores, y los precios de todos los bienes distintos al que se considera. Las variables explícitas son el precio del bien y las compras y ventas de cada consumidor y productor. A los supuestos de la maximización de la utilidad y el beneficio se añade la condición de que el mercado debe compensarse, o sea la demanda total debe igualar a la oferta total. El análisis de un mercado de un solo factor es similar excepto en que las rentas de los consumidores están determinadas por la magnitud de sus ventas de factores.

Las funciones de demanda de un consumidor se derivan de las condiciones de equilibrio para la maximización de su utilidad. Si compra y consume dos bienes, la demanda de cada uno es función de ambos precios y de su renta:

$$D_1 = D_1(p_1, p_2, y) \qquad D_2 = D_2(p_1, p_2, y)$$

En el análisis del equilibrio de un mercado único de Q_1, p_2 e y se convierten en parámetros, y D_1 se convierte en función sólo de P_1:

$$D_1 = D_1(p_1, p_2^0, y^0) \qquad D_2 = D_2(p_1, p_2^0, y^0)$$

Como resultado de estos supuestos, también D_2 se convierte en función exclusiva de p_1 aunque esta relación se haga explícita raras veces. En virtud de la ecuación de balance, si el consumidor aumenta su gasto en Q_1, tiene que reducir el de Q_2. En el análisis del equilibrio de un mercado único las cantidades que el consumidor compra de bienes, que no se han considerado, son variables implícitas. A los productores se les puede aplicar consideraciones análogas. Las cantidades de inputs que emplea un productor se convierten en función exclusiva del precio de su output.

Cada uno de los precios es una variable en el análisis de su propio mercado y un parámetro en el análisis de los demás. Considerando un solo mercado cada vez, no hay seguridad de que las soluciones fragmentarias den una serie consistente de precios. Sólo por azar, el precio de Q_j que resulte del análisis del mercado de Q_k será el mismo que el precio que se fija para Q_k en el análisis aislado del mercado de Q_j.

Todos los mercados están interrelacionados. Los consumidores gastan sus rentas en todos los bienes, y la demanda de cada uno de ellos depende de todos los precios. Si los bienes Q_1 y Q_2 son totalmente sustitutivos, un aumento en el precio de Q_1 inducirá a todos los consumidores en bloque a sustituir Q_1 por Q_2. Si son complementarios, un aumento en el precio de Q_1 inducirá a los consumidores a restringir el consumo de ambos bienes (véase Sección 2-6). También pueden definirse como sustitutivos o complementarios algunos pares de inputs. Aún más, la producción y el consumo no son independientes. Los consumidores ganan sus rentas con la venta de trabajo y otros factores productivos a los productores. Como resultado de estas interconexiones, y para garantizar una serie consistente de precios, los equilibrios de todos los mercados de productos y factores deben determinarse simultáneamente.

Los datos para la determinación del equilibrio general de un multimercado son las funciones de utilidad y producción de todos los consumidores y productores, y sus cantidades fijas, iniciales, de factores y/o bienes. Las variables son los precios de todos los factores y bienes y las cantidades compradas y vendidas por cada consumidor y productor. Los supuestos de conducta requieren la maximización de la utilidad y del beneficio juntamente con la condición de que cada mercado quede vacío.

En la Sección 5-1 se desarrolla el análisis del equilibrio de un multimercado en el que sólo se realizan operaciones de trueque, y en la Sección 5-2 dicho análisis se extiende hasta incluir la producción. En la Sección 5-3 se estudian los problemas de la determinación de precios absolutos y la elección de una medida del valor. En la 5-4 se aplican al sistema del multimercado las condiciones de estabilidad estática y dinámica. La 5-5 contiene un breve estudio sobre la existencia y unicidad de las soluciones de equilibrio, y en la 5-6 se describe el sistema input-output.

5-1. El intercambio

El análisis del intercambio puro trata los problemas de fijación de precios y asignación de recursos de una sociedad en la que n individuos cambian y consumen cantidades fijas de m bienes. Cada individuo tiene cierta cantidad inicial de uno o más bienes y es libre de comprar y vender a los precios de mercado vigentes. Las compras y las ventas pueden interpretarse como operaciones de cambio. Imaginemos un consumidor cuya dotación inicial consista de veinte peras y tres manzanas y supongamos que no existen otros bienes. Los precios de mercado vigentes determinan las condiciones a las que se pueden cambiar peras por manzanas o viceversa. Si el precio de las manzanas es de 10 centavos y el de las peras 5 centavos, se puede obtener una manzana vendiendo dos peras o dos peras vendiendo una manzana. Dados los precios de mercado y las dotaciones iniciales, la función de utilidad ordinal de cada consumidor determinará sus compras. Sería un caso extraño el que ninguno de los consumidores pudiese aumentar su nivel de satisfacción a través del cambio. Un consumidor querrá vender una parte de su dotación inicial de algunos bienes y aumentar sus stocks de otros mientras pueda con ello aumentar su índice de utilidad.

El equilibrio del consumidor (i^o). — El exceso de demanda del artículo j^o del consumidor i^o (E_{ij}) se define como la diferencia entre la cantidad que consume (q_{ij}) y su dotación inicial (q^0_{ij}):

$$E_{ij} = q_{ij} - q^0_{ij} \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{5-1}$$

Si su consumo de Q_j excede su dotación inicial, su exceso de demanda es positivo; y compra Q_j en el mercado. Si su consumo es menor que su dotación inicial, su exceso de demanda es negativo; vende Q_j en el mercado. No es posible determinar, *a priori*, el signo de su exceso de demanda. Tanto puede comprar Q_j como venderlo. Ya no es posible la tajante distinción entre compradores y vendedores usada en el capítulo 4.

La renta del consumidor es igual al valor de su dotación inicial:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} p_j q^0_{ij} \tag{5-2}$$

Esta es la cantidad de poder adquisitivo que obtendría si vendiese toda su dotación. Para relacionar el análisis presente con el del capítulo 2, supongamos, por el momento, que vende toda su dotación, y usa el producto de la venta para comprar bienes a los precios de mercado vigentes. El valor de los artículos que compra y consume es igual a su renta, tal como se daba en (5-2):

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} p_j q_{ij} \tag{5-3}$$

Sus adquisiciones incluirán, seguramente, algunos de los bienes que vendió, pero esto no tiene importancia desde el momento que se ha supuesto que los actos de comprar y vender son gratuitos. El análisis no se afecta si se omiten las transacciones que se autocancelan. Por tanto, de aquí en adelante se supone que el consumidor no compra los mismos bienes que vende. Su ecuación de balance se puede expresar en términos de sus excesos de demanda. Restando (5-2) de (5-3) y sustituyendo por (5-1),

$$\sum_{j=1}^{m} p_j(q_{ij} - q^0_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} p_j E_{ij} = 0 \tag{5-4}$$

El valor neto del exceso de demanda del consumidor debe igualar a cero. En esta forma, su ecuación de balance establece que el valor de los artículos que compra debe igualarse al de los que vende.

El análisis del equilibrio del consumidor desarrollado en el capítulo 2 necesita una ligera modificación para que se pueda aplicar al consumidor en una economía de puro intercambio. El índice de utilidad del consumidor es función de todas las cantidades de los artículos que consume, pero puede establecerse en función de sus excesos de demanda y dotaciones iniciales sustituyendo q_{ij} por su valor de (5-1), $q_{ij} = E_{ij} + q_{ij}^0$:

$$U_i = U_i(q_{i1}, \ldots, q_{im}) = U_i(E_{i1} + q_{i1}^0, \ldots, E_{im} + q_{im}^0) \qquad (5\text{-}5)$$

El consumidor desea maximizar el valor de su índice de utilidad sujeto a su ecuación de balance. Usando la forma de la función de utilidad dada por (5-5) y la ecuación de balance (5-4), formemos la función:

$$V_i = U_i(E_{i1} + q_{i1}^0, \ldots, E_{im} + q_{im}^0) - \lambda\left(\sum_{j=1}^{m} p_j E_{ij}\right) \qquad (5\text{-}6)$$

e igualemos a cero las derivadas parciales respecto a los excesos de demanda

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial E_{ij}} &= \frac{\partial U_i}{\partial E_{ij}} - \lambda p_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \\ \frac{\partial V_i}{\partial \lambda} &= -\left(\sum_{j=1}^{m} p_j E_{ij}\right) = 0 \end{aligned} \qquad (5\text{-}7)$$

Puesto que $dE_{ij}/dq_{ij} = 1$, la primera serie de ecuaciones (5-7) se puede expresar en términos de los incrementos del índice de utilidad:

$$\frac{\partial U_i}{\partial E_{ij}} \frac{dE_{ij}}{dq_{ij}} - \lambda p_j = \frac{\partial U_i}{\partial q_{ij}} - \lambda p_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Las condiciones de primer grado del consumidor individual son las ya familiares, desarrolladas en el capítulo 2. El compra y vende artículos hasta que la relación de sustitución entre bienes, para cada uno de ellos (*la razón de los incrementos de sus índices de utilidad*) iguale la razón de sus precios. Las condiciones de segundo grado requieren que los Hessianos orlados relevantes alternen de signo (véase Sección 2-7).

Si se satisfacen las condiciones de segundo grado, las funciones de exceso de demanda del consumidor i^o se pueden derivar de las condiciones de primer grado. Usemos una de las ecuaciones de (5-7) para eliminar λ y hallemos el valor de los excesos de demanda en función de los precios de los artículos en las m restantes:

$$E_{ij} = E_{ij}(p_1, \ldots, p_m) \qquad (j = 1, \ldots, m) \qquad (5\text{-}8)$$

Los excesos de demanda del consumidor dependen de los precios de todos los artículos. Si su dotación de Q_j no es cero, su exceso de demanda puede ser positivo para algunas series de precios y negativo para otras.

En la Sección (2-4) se probó que las funciones de demanda del consumidor son homogéneas de grado cero en renta y precios. En una economía en régimen de puro cambio se puede probar un teorema parecido: las funciones de exceso de demanda del consumidor son homogéneas de grado cero en precios, o sea: los excesos de demanda permanecerán inalterables si se aumentan o disminuyen los precios en la misma pro-

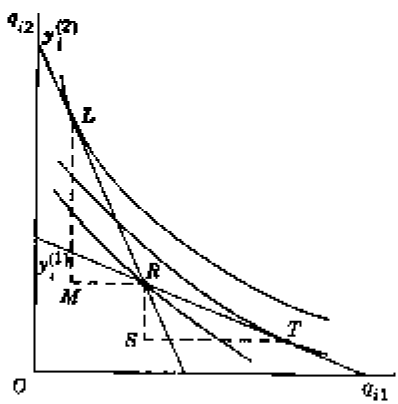


FIGURA 5-1

porción.[1] El duplicar todos los precios duplicaría a la vez el valor de la dotación inicial del consumidor y el coste de los artículos que adquiriese. Si la dotación del consumidor consiste en peras y manzanas y sus precios aumentan de 5 y 10 centavos a 10 y 20 respectivamente, aún podría seguir obteniendo una manzana con dos peras o dos peras con una manzana. En una economía de trueque de este tipo el consumidor está más interesado en las razones de intercambio del mercado que en los niveles absolutos de precios.

En la figura 5-1 se da una descripción gráfica del equilibrio de un consumidor individual. Su dotación inicial viene dada por las coordenadas de R. Su línea de renta es el lugar geométrico de todas las combi-

1. La prueba es similar a la usada en la sección 2-4. En (5-6) sustituyamos kp_j en la ecuación de balance, igualemos a cero sus derivadas parciales para obtener un sistema parecido al (5-7), dividamos las $(n+1)$ ecuaciones por la m^a para eliminar λ y k, y eliminemos el factor k de la $(n+1)^a$.

naciones de cantidades del mismo valor de mercado que su dotación inicial. Si $y_i^{(1)}$ es su línea de renta, maximizará la utilidad desplazándose a T. Al moverse de R a T, venderá RS unidades de Q_2 y comprará ST unidades de Q_1. Su exceso de demanda de Q_1 es positivo, y el de Q_2 negativo.

Supongamos que el precio de Q_1 aumenta en relación al de Q_2 y que la nueva línea de renta del consumidor es $y_i^{(2)}$. El punto L es la posición de máxima utilidad de esta línea de renta. Al moverse de R a L el consumidor venderá MR unidades de Q_1 y comprará ML de Q_2. Un cambio de precio ha ocasionado un cambio de signo en sus excesos de demanda. Su exceso de demanda de Q_1 es ahora negativo y el de Q_2 positivo.

En el análisis gráfico se pone de manifiesto la intrascendencia del nivel absoluto de precios. La dotación inicial del consumidor viene dada por un punto que representa cantidades físicas. Su línea de renta se dibuja por este punto con una pendiente igual a la razón de los precios de los artículos con signo negativo. Un cambio proporcional de ambos precios dejará su razón inalterada y no cambiará ni la pendiente ni la posición de la línea de renta.

El equilibrio de mercado. — Sumando las funciones de exceso de demanda individuales de los n consumidores se construye una función de exceso de demanda total de Q_j:

$$E_j = \sum_{i=1}^{n} E_{ij}(p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_m) = E_j(p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_m)$$

El exceso de demanda total es también función de los m precios de artículos. En el mercado j^0 se consigue el equilibrio parcial si al asignar valores fijos a los restantes $(m - 1)$ precios, se anula el exceso de demanda de Q_j.

$$E_j(p_1^0, \ldots, p_j, \ldots, p_m^0) = 0 \tag{5-9}$$

La condición (5-9) es equivalente a la de que la oferta se iguale a la demanda. El precio de equilibrio de Q_j se obtiene hallando el valor de p_j en (5-9) y depende de los precios asignados a los otros $(m - 1)$ artículos. Las compras y ventas de los consumidores individuales se determinan sustituyendo el precio de equilibrio en las funciones de exceso de demanda individuales.

El equilibrio del multimercado. — Tratemos ahora todos los precios como variables y consideremos el equilibrio simultáneo de todos los m mercados. El exceso de demanda total debe igualarse a cero en cada mercado:

$$E_j(p_1, \ldots, p_m) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{5-10}$$

Las condiciones de equilibrio forman un sistema de m ecuaciones con m variables. Sin embargo, (5-10) contiene solamente $(m-1)$ ecuaciones independientes y no permite hallar los valores absolutos de los m precios.

Las ecuaciones de balance de cada uno de los n consumidores no son condiciones de equilibrio, sino identidades que se satisfacen para cualquier serie de precios. Sumando las ecuaciones de balance de todos los consumidores dadas por (5-4)

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j E_{ij} = \sum_{j=1}^{m} p_j E_j = 0 \tag{5-11}$$

puesto que $E_j = \sum_{i=1}^{n} E_{ij}$. La forma agregada de la ecuación de balance es también una identidad que se satisface para cualquier serie de precios. *Las condiciones de equilibrio requieren que cada exceso* de demanda total se iguale a cero. Evidentemente si $E_j = 0$, el valor del exceso de demanda de Q_j $(p_j E_j)$ debe ser también cero. Si los primeros $(m-1)$ mercados están en equilibrio, el valor total de sus excesos de demanda es igual a cero:

$$\sum_{j=1}^{m-1} p_j E = 0 \tag{5-12}$$

Restando (5-12) de (5-11)

$$\sum_{j=1}^{m} p_j E_j - \sum_{j=1}^{m-1} p_j E_j = p_m E_m = 0$$

Se sigue que $E_m = 0$, puesto que $p_m \neq 0$. Si se consigue el equilibrio en los $(m-1)$ mercados, se consigue automáticamente en el m^o.

Cualesquiera $(m-1)$ ecuaciones de (5-10) describen completamente el equilibrio del multimercado. La adición de la m^a ecuación, que es dependiente de las otras $(m-1)$, no añade ninguna información. Los valores absolutos de los precios de los m artículos no se pueden determinar de las $m-1$ ecuaciones independientes. La incapacidad de determinar los niveles absolutos de precios no debería sorprendernos si se recuerda que en una economía de trueque los consumidores están únicamente interesados en las relaciones de intercambio.

Puesto que las funciones de exceso de demanda son homogéneas de grado cero en precios, el número de variables se puede reducir a $(m-1)$ dividiendo los m precios absolutos por el precio de un artículo arbitrariamente seleccionado. Si se selecciona Q_1, (5-10) se puede escribir de nuevo como

$$E_j = E_j\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \ldots, \frac{p_m}{p_1}\right) \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{5-13}$$

Las variables de (5-13) son los precios de Q_j $(j \neq 1)$ en relación al precio de Q_1, o sea las relaciones de cambio relativas a Q_1. Generalmente, este sistema de $(m-1)$ ecuaciones independientes puede resolverse para las $(m-1)$ relaciones de cambio relativas a cualquier artículo arbitrariamente seleccionado.[2] En la sección (5-3) se demuestra que estas $(m-1)$ relaciones de cambio son suficientes para determinar los términos del trueque entre cada par de artículos.

Una vez determinadas las relaciones de cambio de equilibrio de (5-13), se pueden conocer las adquisiciones y ventas de cada individuo sustituyéndolas en las funciones de exceso de demanda individuales. Sin embargo, el equilibrio de un multimercado se puede determinar directamente sin tener que recurrir a las funciones totales de excesos de demanda. Las funciones de exceso de demanda individuales son homogéneas de grado cero en precios y se pueden escribir de la misma forma que (5-13):

$$E_{ij} = E_{ij}\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \ldots, \frac{p_m}{p_1}\right) \qquad \begin{array}{l}(i = 1, \ldots, n)\\(j = 1, \ldots, m)\end{array} \tag{5-14}$$

Añadamos ahora la condición de que cada mercado debe quedar vacío:

$$\sum_{i=1}^{n} E_{ij} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{5-15}$$

El sistema formado por (5-14) y (5-15) contiene $(mn + m)$ ecuaciones con las mn excesos de demanda individuales y las $(m-1)$ relaciones de cambio como variables. De nuevo, una de las ecuaciones es funcionalmente dependiente de las demás, y, por tanto, no pueden determinarse los niveles de precios absolutos.

El intercambio de dos artículos. — El análisis del trueque se puede ilustrar con el ejemplo de dos individuos que cambian dos artículos.

2. Esto no es siempre verdad (véase la sección 5-5 más adelante).

Supongamos que el individuo I posee 78 unidades de Q_1 y ninguna de Q_2, y que su función de utilidad es

$$U_1 = q_{11} q_{12} + 2 q_{11} + 5 q_{12}$$

Sustituyamos $q_{11} = E_{11} + 78$ y $q_{12} = E_{12}$ en su función de utilidad y formemos la función

$$V_1 = (E_{11} + 78) E_{12} + 2 (E_{11} + 78) + 5E_{12} - \lambda (p_1 E_{11} + p_2 E_{12})$$

Obtengamos las derivadas parciales de V_2 igualadas a cero:

$$\frac{\partial V_1}{\partial E_{11}} = E_{12} + 2 - \lambda p_1 = 0$$
$$\frac{\partial V_1}{\partial E_{12}} = E_{11} + 83 - \lambda p_2 = 0$$
$$\frac{\partial V_1}{\partial \lambda} = -(p_1 E_{11} + p_2 E_{12}) = 0$$

El lector puede darse cuenta de que se satisface la condición de segundo *grado expuesta en la Sección 2-2.*

Eliminando λ y resolviendo las condiciones de primer grado de E_{11} y E_{12}, las funciones de exceso de demanda de I son

$$E_{11} = \frac{p_2}{p_1} - 41{,}5 \qquad E_{12} = 41{,}5 \frac{p_1}{p_2} - 1$$

Sus excesos de demanda son funciones de la relación de precios de los artículos y son homogéneas de grado cero en precios. La ecuación de balance de I se satisface para cualquier serie de precios:

$$p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 41{,}5\right) + p_2 \left(41{,}5 \frac{p_1}{p_2} - 1\right) = 0$$

Las funciones de exceso de demanda poseen las propiedades usuales. Un incremento de p_1 en relación a p_2 disminuirá E_{11} y aumentará E_{12}.

Supongamos que la función de utilidad de II es

$$U_2 = q_{21} q_{22} + 4 q_{21} + 2 q_{22}$$

y que su dotación inicial consiste en 164 unidades de Q_2 y ninguna de Q_1. Un desarrollo parecido al empleado para I nos da las funciones de exceso de demanda:

$$E_{21} = 84 \frac{p_2}{p_1} - 1 \qquad E_{22} = \frac{p_1}{p_2} - 84$$

La ecuación de balance de II se satisface siempre, y sus excesos de demanda son homogéneos de grado cero en precios.

Exigiendo la condición de que cada mercado debe quedar vacío,

$$E_1 = E_{11} + E_{21} = 85\,\frac{p_2}{p_1} - 42{,}5 = 0$$

$$E_2 = E_{12} + E_{22} = 42{,}5\,\frac{p_1}{p_2} - 85 = 0$$

cualquiera de las dos ecuaciones es suficiente para la determinación de la relación de cambio de equilibrio. Resolviendo la primera ecuación, $p_2/p_1 = 0{,}5$. Resolviendo la segunda, $p_1/p_2 = 2$.

Las soluciones son idénticas. En el equilibrio se puede cambiar una unidad de Q_1 por dos unidades de Q_2.

Sustituyendo la relación de precios de equilibrio en las funciones de exceso de demanda individuales,

$$E_{11} = -41 \qquad E_{12} = 82 \qquad E_{21} = 41 \qquad E_{22} = -82$$

El I da 41 unidades de Q_1 a II a cambio de 82 unidades de Q_2.

5-2. Producción y cambio

El análisis del equilibrio del mutimercado se generaliza ahora a una economía en la que los bienes son al mismo tiempo producidos y cambiados. Las dotaciones iniciales de los consumidores consisten en factores primarios tales como tierra y capacidad de trabajo. Generalmente, un consumidor vende factores y utiliza los ingresos resultantes en adquirir artículos producidos, pero puede retener una porción de su dotación inicial para su consumo directo. La capacidad de trabajo proporciona un buen ejemplo. Raras veces ofrecerá el consumidor toda su capacidad de trabajo, sino que generalmente reservará una parte de ella para consumo final bajo la forma de ocio. Si un consumidor posee un factor del que no deriva utilidad, ofrecerá toda la dotación que de él posea sin tener en cuenta los precios de artículos y factores. Algunos consumidores pueden vender un factor y comprar otro. Ejemplo de ello es el terrateniente que emplea servicio doméstico. Para la producción de artículos los empresarios usan a la vez, factores y bienes producidos. Los artículos producidos son tan útiles como inputs que como bienes de consumo final.[3]

3. A veces es necesario distinguir los bienes intermedios puros que no son deseados por los consumidores. Son producidos por los empresarios y usados como inputs.

El equilibrio del consumidor i^o. — Cada uno de los n consumidores está dotado de stocks iniciales de uno o más bienes primarios. La dotación inicial del consumidor i^o se denota por $(q^0_{i1}, q^0_{i2}, \ldots, q^0_{is})$. Puede vender (y comprar) a los precios de mercado vigentes, $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$. El consumidor obtiene utilidad de las cantidades de factores primarios que retiene y de las cantidades de los $(m-s)$ artículos producidos que compra:

$$U_i = U_i\,(q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{im}) \tag{5-16}$$

donde los artículos producidos están numerados desde $(s+1)$ hasta m.

El exceso de demanda de un factor del consumidor, es igual a la cantidad que consume menos su stock inicial, y su exceso de demanda de un artículo es igual a la cantidad que consume.

$$\begin{aligned} E_{ij} &= q_{ij} - q^0_{ij} && (j = 1, \ldots, s) \\ E_{ij} &= q_{ij} && (j = s+1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{5-17}$$

El exceso de demanda de un factor puede ser positivo, negativo o nulo, pero lo más corriente es que sea negativo, puesto que el consumidor generalmente vende factores para comprar artículos. Sus excesos de demanda de artículos deben ser positivos o nulos.

La renta del consumidor es igual al valor de su stock de factores:

$$y_i = \sum_{j=1}^{s} p_j\, q^0_{ij} \tag{5-18}$$

El consumidor es libre de vender de su stock para adquirir artículos y factores. El valor de los factores y artículos que consume debe también ser igual a su renta:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} p_j q_{ij} \tag{5-19}$$

La ecuación de balance del consumidor se obtiene restando (5-18) de (5-19) y sustituyendo por (5-17):

$$\sum_{j=1}^{m} p_j\, E_{ij} = 0 \tag{5-20}$$

El valor neto de sus excesos de demanda de factores y artículos debe *igualarse a cero.*

De nuevo, el consumidor desea maximizar su nivel de utilidad sujeto a su ecuación de balance. Formemos la función

$$Z_i = U_i\,(E_{i1} + q^0_{i1}, \ldots, E_{is} + q^0_{is}, E_{i,s+1}, \ldots, E_{im}) - \mu \left(\sum_{j=1}^{m} p_j E_{ij} \right)$$

e igualemos a cero las derivadas parciales de Z_i:

$$\frac{\partial Z_i}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial U_i}{\partial E_{ij}} - \mu\, p_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \mu} = - \sum_{j=1}^{m} p_j E_{ij} = 0 \tag{5-21}$$

Las condiciones de primer grado requieren que el consumidor iguale la relación de sustitución entre cada par de artículos a la relación de sus precios.

Si se satisfacen las condiciones de segundo grado, las funciones de exceso de demanda del consumidor se obtienen hallando los valores de los m excesos de demanda en función de los m precios en (5-21):

$$E_{ij} = E_{ij}\,(p_1, \ldots, p_m) \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{5-22}$$

Sus excesos de demanda de factores y artículos dependen de los precios de todos los factores y artículos y son homogéneos de grado cero respecto a dichos precios.

El equilibrio de la empresa h^a de la industria j^a. — Cada empresa combina inputs para la producción de un solo artículo de acuerdo con las reglas técnicas especificadas por su función de producción: [4]

$$\bar{q}_{hj} = f_{hj}\,(q^*_{hj1}, \ldots, q^*_{hjm}) \tag{5-23}$$

Donde $\bar{q}_{hj}$ es el nivel de output de la empresa h^a de la industria j^a y q^*_{hjk} es la cantidad del bien k^o que el empresario usa como input. Los s factores y los $(m - s)$ artículos sirven de inputs.

El beneficio del empresario es su ingreso menos los costes de sus inputs:

$$\pi_{hj} = p_j f_{hj}\,(q^*_{hj1}, \ldots, q^*_{hjm}) - \sum_{k=1}^{m} p_k q^*_{hjk} \tag{5-24}$$

Igualando a cero las derivadas parciales del beneficio respecto a cada uno de los inputs:

4. A veces se estudia la producción bajo el supuesto alternativo de que cada empresa produce conjuntamente todos los bienes.

$$\frac{\partial \pi_{hj}}{\partial q^*_{hjk}} = p_j \frac{\partial \bar{q}_{hj}}{\partial q^*_{hjk}} - p_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{5-25}$$

El empresario utilizará cada input hasta que el valor de su productividad marginal física sea igual a su precio. Las condiciones de segundo grado requieren que los menores principales del Hessiano relevante alternen de signo (véase Sección 3-2) e implican que la productividad marginal física de cada input es decreciente.

Las condiciones (5-25) implican que $\partial \bar{q}_{hj} / \partial q_{hjj}{}^* = 1$. Si el empresario utiliza su propio output como input, como cuando un granjero utiliza *parte de su trigo como simiente, lo hará hasta que su productividad* marginal física sea igual a la unidad.

Las funciones de exceso de demanda del consumidor para sus inputs se obtienen resolviendo las m ecuaciones de (5-25) para $q^*_{hjk} = E^*_{hjk}$:

$$E^*_{hjk} = E^*_{hjk}(p_1, \ldots, p_m) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{5-26}$$

La cantidad que compra de cada input es función de todos los precios. Puesto que el empresario nunca ofrece (vende) inputs, sus excesos de demanda son siempre no negativos.

Si la industria j^a contiene N_j empresas idénticas, el exceso de demanda total del input k^o es igual al exceso de demanda del mismo input de una empresa representativa multiplicado por el número de empresas de la industria:

$$E^*_{jk} = N_j E^*_{hjk}(p_1, \ldots, p_m) = E^*_{jk}(p_1, \ldots, p_m, N_j) \tag{5-27}$$

El exceso de demanda de un input, de una industria, es función de todos los precios y del número de empresas de la industria.

El exceso de demanda del empresario, de su propio output (oferta de), se determina sustituyendo las funciones de exceso de demanda de sus inputs (5-26) en la función de producción (5-23) y haciendo $\bar{E}_{hj} = -\bar{q}_{hj}$:[5]

$$\bar{E}_{hj} = -f_{hj}[E^*_{hj1}(p_1, \ldots, p_m), \ldots, E^*_{hjm}(p_1, \ldots, p_m)]$$

o más simplemente

$$\bar{E}_{hj} = \bar{E}_{hj}(p_1, \ldots, p_m)$$

El exceso de demanda de la industria en bloque es igual al de una empresa representativa multiplicado por el número de empresas:

5. Las funciones de exceso de demanda aisladas se definen con Q_j como output y como input. Ambos pueden combinarse en un sólo exceso de demanda neto sin afectar el análisis.

$$\bar{E}_j = N_j \bar{E}_{hj}(p_1, \ldots, p_m) = \bar{E}_j(p_1, \ldots, p_m, N_j) \tag{5-28}$$

El exceso de demanda de una industria depende de los precios de todos los bienes y del número de empresas de la industria.

Las funciones de exceso de demanda del empresario de output e inputs son homogéneas de grado cero en todos los precios. Si todos los precios se alteran en el factor $t > 0$, (5-24) se convierte en

$$\pi_{kj} = (tp_j) f_{kj}(q^*_{hj1}, \ldots, q^*_{hjm}) - \sum_{k=1}^{m} (tp_k) q^*_{hjk}$$

Igualando a cero las derivadas parciales,

$$\frac{\partial \pi_{kj}}{\partial q^*_{hjk}} = tp_j \frac{\partial \bar{q}_{hj}}{\partial q^*_{hjk}} - tp_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

o

$$t\left(p_j \frac{\partial \bar{q}_{kj}}{\partial q^*_{hjk}} - p_k\right) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

Puesto que $t \neq 0$

$$p_j \frac{\partial \bar{q}_{hj}}{\partial q^*_{hjk}} - p_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

Las condiciones de primer grado, de las que se obtienen los excesos de demanda, se pueden establecer de forma idéntica a (5-25). Puesto que un cambio proporcional de todos los precios no modifica las condiciones de segundo grado, tampoco alterará los excesos de demanda.

El equilibrio de mercado. — Las funciones de exceso de demanda de inputs y outputs de consumidores y empresarios son aditivas. El exceso de demanda total de un factor es la suma de los excesos de demanda de los n consumidores (5-22) y de las $(m - s)$ industrias (5-27):

$$E_j = \sum_{i=1}^{n} E_{ij}(p_1, \ldots, p_m) + \sum_{k=s+1}^{m} E^*_{kj}(p_1, \ldots, p_m, N_k) \qquad (j = 1, \ldots, s) \tag{5-29}$$

El exceso de demanda total de un artículo es la suma de los excesos de demanda de los n consumidores (5-22), de las $(m - s)$ industrias que lo utilizan como input (5-27) y de sus productores (5-28):

$$E_j = \sum_{i=1}^{n} E_{ij}(p_1, \ldots, p_m) + \sum_{k=s+1}^{m} E^*_{kj}(p_1, \ldots, p_m, N_k) + \bar{E}_j(p_1, \ldots, p_m, N_j) \qquad (j = s+1, \ldots, m) \tag{5-30}$$

Los excesos de demanda total dados por (5-29) y (5-30) se pueden formular simplemente por

$$E_j = E_j\,(p_1, \ldots, p_m, N_{s+1}, \ldots, N_m) \qquad (j = 1, \ldots, m) \qquad (5\text{-}31)$$

El exceso de demanda de cada bien es función de los m precios y del número de empresas dentro de las $(m - s)$ industrias productoras.

Para cada uno de los m mercados, considerados aisladamente de los restantes $(m - 1)$, se pueden determinar equilibrios parciales a corto y a largo plazo. Un precio de equilibrio a corto plazo se determina igualando a cero el exceso de demanda total del artículo que se considera. Los precios de los otros $(m - 1)$ artículos y el número de empresas dentro de las $(m - s)$ industrias productivas se consideran parámetros. La única diferencia entre el análisis del equilibrio de un mercado de factores a corto y a largo plazo, es el período de tiempo para que se define la función de exceso de demanda.

En la determinación del equilibrio del mercado de un artículo a largo plazo, el número de empresas de la industria se convierte en una variable.

El equilibrio del multimercado. — El equilibrio del multimercado requiere que cada uno de los mercados quede vacío y que, en cada industria, el beneficio se iguale a cero: [6, 7]

6. Durante el período a corto plazo no puede cambiar el número de empresas dentro de las industrias productivas. Puesto que los empresarios son al mismo tiempo consumidores, deben incluirse sus beneficios y pérdidas en sus ecuaciones de balance. Una vez hecho esto, el equilibrio a corto plazo del multimercado se consigue exigiendo que cada mercado quede vacío.

7. Las ecuaciones de limpieza de mercado dadas por (5-32) se formulan en el supuesto de que cada bien es escaso en relación a su demanda. Estableciendo las ecuaciones de limpieza de mercado de factores primarios como desigualdades débiles, se puede extender el sistema hasta abarcar la posibilidad de bienes libres.

$$E_j(p_1, \ldots, p_m, N_{s+1}, \ldots, N_m) \le 0 \qquad (j = 1, \ldots, s)$$

Siguiendo el supuesto de conducta de Walras, si el exceso de demanda es negativo, la competencia entre los compradores hará bajar el precio. Dado que los consumidores rehusarán ofrecer un factor a un precio negativo, el precio no puede caer por debajo de cero. Si cuando $p_j = 0$, $E_j < 0$, Q_j es un bien libre, o sea: a un precio cero los vendedores ofrecerán una cantidad superior a la que desean adquirir los compradores. El precio de un bien libre es igual a cero, y se mantiene la desigualdad de su ecuación de limpieza de mercado. Una situación de precio cero es estable en el sentido de que el mercado volverá al equilibrio después de una perturbación. Si el precio sobrepasa cero, la competencia entre los vendedores lo forzará a bajar. Si cayese por debajo de cero, la oferta también sería cero. Esta formulación desigual permite al mecanismo de precio determinar qué bienes son libres y cuáles escasos.

$$\begin{aligned} E_j\,(p_1, \ldots, p_m, N_{s+1}, \ldots, N_m) &= 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \\ \pi_j\,(p_1, \ldots, p_m) &= 0 \qquad (j = s+1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{5-32}$$

donde π_j es el beneficio de una empresa representativa de la industria j^a. De nuevo, una de las ecuaciones que exigen que el mercado quede vacío se puede expresar como función lineal de las demás. Las $(2m - s)$ condiciones de equilibrio dadas por (5-32) representan solamente $(2m - s - 1)$ ecuaciones independientes.

Una vez más el equilibrio depende más de los precios relativos que de los absolutos. Puesto que los excesos de demanda de cada consumidor y empresario son homogéneos de grado cero en precios, los *excesos de demanda totales son también* homogéneos de grado cero en precios. Las funciones de beneficio [véase (5-24)] son homogéneas de grado uno en precios. Si se doblan todos los precios, los niveles de input y output del empresario permanecerán invariables, pero su coste e ingreso total, y por tanto su beneficio, se doblará. Sin embargo, si se establece un equilibrio a largo plazo con una serie de precios, el sistema permanecerá en equilibrio si todos los precios cambian en la misma proporción. Si se doblan todos los precios, los excesos de demanda serán nulos. Se doblarán los ingresos y costes de las empresas representativas, pero los niveles de beneficio permanecerán iguales a cero, y ninguna empresa nueva se verá inducida a entrar en ninguna industria.

El número de variables de (5-32) se puede reducir en una dividiendo los m precios absolutos por el precio de un artículo seleccionado arbitrariamente. Si se elige Q_1, (5-32) se puede escribir como

$$\begin{aligned} E_j\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \ldots, \frac{p_m}{p_1}, N_{s+1}, \ldots, N_m\right) &= 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \\ \pi_j\left(1, \frac{p_2}{p_1}, \ldots, \frac{p_m}{p_1}\right) &= 0 \qquad (j = s+1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{5-33}$$

Este sistema de $(2m - s - 1)$ ecuaciones independientes permite, generalmente, hallar los valores de equilibrio de las $(m - 1)$ relaciones de cambio relativas a Q_1 y los $(m - s)$ números de empresas.

Una vez se ha determinado el equilibrio de las relaciones de cambio y número de empresas, se pueden calcular los excesos de demanda de cada consumidor y empresario sustituyendo sus valores en las funciones de exceso de demanda individual. Una solución de equilibrio a largo plazo satisface las siguientes condiciones: 1.º cada consumidor maximiza su utilidad; 2.º cada empresario maximiza su beneficio; 3.º cada mercado queda vacío, y 4.º cada empresario obtiene un beneficio nulo,

5-3. El numerario, el dinero, y la ley de Say.

En la Secciones 5-1 y 5-2 se ha establecido el equilibrio general para economías de trueque en las que no existe circulación monetaria. Artículos y factores se cambian por otros artículos y factores, y las condiciones de intercambio están perfectamente descritas por las relaciones de cambio. En estos sistemas, se han hallado las $(m-1)$ relaciones de cambio relativas a un bien seleccionado arbitrariamente, llamado generalmente el *numerario*. Cualquier serie de precios absolutos que dé las relaciones de cambio de equilibrio es una solución de equilibrio. Si tal solución existe, existen infinitas.

Dentro de un sistema de equilibrio general puede introducirse cierto número de clases distintas de dinero. Se puede elegir un bien como patrón de valor y hacerle servir de dinero en el sentido de que todos los precios se expresan en términos de sus unidades. Se puede establecer el dinero como una unidad abstracta de cuenta que sirve como patrón de valor, pero no circula. Bajo ciertas circunstancias se puede introducir el papel moneda circulante. En otras, el intento de introducirlo produce contradicciones.

EL NUMERARIO. — Tomando los artículos de dos en dos, para cada m bienes existen m^2 relaciones de cambio. De éstos, m son identidades que establecen que la relación de cambio de un bien respecto de sí mismo es igual a la unidad: $p_j/p_k = 1$ para $j = k$. Estas m relaciones de cambio no son independientes. Consideremos la identidad y las $(m-1)$ relaciones de cambio con Q_1 como *numerario*. Las demás $m(m-1)$ relaciones de cambio e identidades pueden derivarse de éstas:

$$\frac{p_j}{p_k} = \frac{p_j}{p_1} : \frac{p_k}{p_1} \qquad (j,\ k = 1,\ \ldots,\ m) \tag{5-34}$$

Imaginemos que Q_1 son peras, Q_2 naranjas, y Q_3 manzanas, y que se cambian dos naranjas por una pera $(p_2/p_1 = 0{,}5)$ y una manzana por dos peras $(p_3/p_1 = 2)$. Utilizando (5-34), se verá que se cambian 4 naranjas por una manzana: $p_3/p_2 = 4$. La serie completa de relaciones de cambio viene dada directa o indirectamente por las $(m-1)$ relaciones de cambio y la identidad para el *numerario*.

El *numerario* puede cambiarse de Q_1 a Q_k dividiendo las relaciones de cambio e identidad de Q_1 por p_k/p_1:

$$\frac{1}{p_k/p_1}\left(1, \frac{p_2}{p_1},\ \ldots,\ \frac{p_k}{p_1},\ \ldots,\ \frac{p_m}{p_1}\right) = \left(\frac{p_1}{p_k}, \frac{p_2}{p_k},\ \ldots,\ 1,\ \ldots,\ \frac{p_m}{p_k}\right)$$

Las relaciones de cambio no se ven afectadas por esta transformación, y, por tanto, la selección del *numerario* es completamente arbitraria.

El *numerario* puede servir también como standard de valor. Haciendo su precio idéntico a la unidad, la relaciones de cambio se convierten en $p_j/p_1 = p_j$. Las relaciones de cambio de equilibrio no se ven afectadas por esta transformación. El precio de equilibrio de cada bien se expresa como el número de unidades de *numerario* que hay que dar para obtener una unidad de aquel bien. El precio de las naranjas es de 0,5 peras por cada una, y el precio de las manzanas de 2 peras. El precio de las manzanas es cuatro veces el de las naranjas, y se puede cambiar una manzana por cuatro naranjas manteniendo el equilibrio. El *numerario* se ha convertido en dinero en el sentido de que sus unidades sirven como standard de valor. Sin embargo, no sirve como provisión de valor, puesto que se desea sólo como factor productivo o artículo de consumo, igual que todos los demás bienes. En este sentido, cualquier bien puede servir como un standard de valor.

No es corriente que se formulen los precios en términos de un bien como las peras. Generalmente los precios se expresan en términos de una unidad monetaria tal como dólares. El dinero contable se introduce fácilmente dentro del armazón de un sistema general de equilibrio. No hay razón para que el precio del numerario deba ser igual a la unidad. Puede hacerse igual a 2, $\sqrt{2}$, 25, o 200 millones. Las relaciones de cambio de equilibrio no se alterarán. El dinero contable puede introducirse fijando el precio del numerario (o cualquier otro bien), igual a un número específico de unidades monetarias. Desde este momento, los precios de los demás bienes pueden fijarse en unidades monetarias. Si Q_1 es el *numerario* y p_1 se hace igual a β dólares, el precio en dólares de Q_k (p_k) es

$$\rho_k = \beta \frac{p_k}{p_1} \qquad (k = 2, \ldots, m)$$

Si establecemos el precio de una pera en dos dólares, el precio de una naranja es un dólar y el de una manzana cuatro dólares. En este caso el dinero sirve solamente como unidad abstracta de cuenta. No existe en sentido físico. Los bienes siguen cambiándose por otros bienes. Nadie atesora el dinero, ni nadie desea hacerlo. El dinero contable sirve como patrón, pero no como reserva de valor. [8]

8. En el análisis de consumidor y empresario está implícito el supuesto de que el dinero es solamente una unidad de cuenta. Es posible que la renta del consumidor se exprese en dinero, pero él gasta toda su renta y no desea retener dinero. El empresario maximiza su beneficio monetario, pero tampoco desea retener dinero. Si obtiene un beneficio positivo, lo gastará como consumidor.

El equilibrio monetario. — El dinero mercancía y el dinero contable son completamente diferentes del dinero circulante que sirve como reserva de valor. Los economistas clásicos del siglo XIX dividían frecuentemente la economía en dos sectores, de acuerdo con la determinación del precio de equilibrio: el sector real en el que las relaciones de cambio están determinadas, y el sector monetario en el que los precios absolutos en dinero están determinados por la cantidad de dinero en circulación. En las Secciones 5-1 y 5-2 se ha descrito el sector real. La tarea actual consisto en añadir a este análisis el sector monetario. Para simplificar, el análisis se desarrolla para el caso de una economía de trueque pero fácilmente puede generalizarse para cubrir la producción y el intercambio.

Supongamos que los n consumidores posean también stocks iniciales de papel moneda, indicados con el subíndice $(m+1)$: $(q^0_{1,m+1}, \ldots, q^0_{n,m+1})$. El papel moneda sirve como depósito de valor, pero no entra en las funciones de utilidad del consumidor. El exceso de demanda de papel moneda del consumidor i^o es igual al stock que desea tener menos su stock inicial:

$$E_{i,m+1} = q_{i,m+1} - q^0_{i,m+1} \tag{5-35}$$

Su exceso de demanda es positivo si aumenta su stock inicial de dinero y negativo si lo reduce. La ecuación de balance del consumidor (5-4) es preciso reformularla para que incluya al dinero:

$$\sum_{j=1}^{m+1} p_j \, E_{ij} = 0 \tag{5-36}$$

donde p_j es el precio del artículo j. Por definición, el precio del dinero es igual a la unidad. El consumidor puede cambiar dinero por artículos o artículos por dinero. Si su exceso de demanda de dinero es positivo, el valor de los artículos que vende es mayor que el de los que compra, y está cambiando artículos por dinero.

Puesto que el dinero no entra en la función de utilidad del consumidor, la magnitud de su exceso de demanda de dinero no puede determinarse mediante los principios de maximización de la utilidad. Se supone, generalmente, que el consumidor cree conveniente retener dinero para facilitar las transacciones de artículos. Supongamos que el consumidor i^o desea retener en dinero una proporción fija del valor monetario de su dotación inicial de artículos:

$$q_{i,m+1} = a_i \sum_{j=1}^{m} p_j \, q^0_{ij} \tag{5-37}$$

dondo α_i es una constante. Sustituyendo (5-37) on (5-35),

$$E_{i,m+1} = \alpha_i \sum_{j=1}^{m} p_j \, q_{ij}^0 - q_{i,m+1}^0 \tag{5-38}$$

El exceso do demanda total de dinero se obtiene sumando (5-38) para los n consumidores:

$$E_{m+1} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i \, q_{ij}^0 - \sum_{i=1}^{n} q_{i,m+1}^0 = E_{m+1}(p_1, \ldots, p_m) \tag{5-39}$$

Nada esencial se pierde si suponemos que $\alpha_i = \alpha$ para $(i = 1, \ldots, n)$. Si las dotaciones iniciales, de artículos y dineros, son fijas, el exceso de demanda de dinero es función de los precios de los m artículos.

Las funciones de exceso de demanda de los m artículos se determinan maximizando la utilidad de cada consumidor sujeta a su ecuación de balance, incluyendo ésta el dinero, resolviendo las condiciones de primer grado para obtener las funciones de exceso de demanda individual, y sumando entonces para todos los consumidores. Existe equilibrio general si el exceso de demanda de cada artículo y del dinero son iguales a cero:

$$E_j(p_1, \ldots, p_m) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m + 1) \tag{5-40}$$

De aquí resulta un sistema de $(m + 1)$ ecuaciones con los m precios de los artículos como variables. Puesto que la ecuación de balance total, que incluye el dinero, se satisface siempre, solamente m de estas ecuaciones son independientes. Por tanto, si los mercados de los m artículos están en equilibrio, el mercado del dinero también lo está, o sea: el conjunto de consumidores no desea intercambiar artículos por dinero ni viceversa. La cantidad de dinero que los consumidores desean retener es igual a la cantidad on existencia. Generalmente, de las m ecuaciones independientes de (5-40) se puede hallar el valor de los precios en dinero de los m artículos.

Los excesos de demanda de artículos y dinero no son homogéneos de grado cero en los precios de los artículos. Si se multiplican todos los precios de los artículos por el factor $t > 0$, el exceso de demanda de dinero (5-39) se convierte en

$$E_{m+1} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (tp_j) \, q_{ij}^0 - \sum_{i=1}^{n} q_{i,m+1}^0 \tag{5-41}$$

La derivada parcial de (5-41) respecto a t es

$$\frac{\partial E_{m+1}}{\partial t} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j \, q_{ij}^0 > 0$$

El equilibrio monetario se ha formulado para el caso en que las ecuaciones de balance se definan incluyendo el dinero. La identidad relevante (5-36) se mantiene para todos los artículos y el dinero, y (5-43) es una condición de equilibrio. En el equilibrio, los consumidores no desean cambiar dinero por artículos ni artículos por dinero.

Si (5-43) es una identidad, los consumidores no desearán cambiar nunca dinero por artículos ni viceversa. Esto implica que el exceso de demanda de dinero es idénticamente igual a cero:

$$E_{m+1} \equiv 0 \qquad (4\text{-}45)$$

Independientemente de los precios de los artículos, los consumidores no desearán jamás aumentar o disminuir sus stocks de dinero. La conducta implícita es inconsistente con la introducción de las ecuaciones de cantidad, tales como la (5-37), que establece que los excesos de demanda de dinero de los consumidores dependen de los precios de los artículos. Por tanto, la cantidad de dinero no puede servir para determinar los niveles de precio absolutos. Puesto que (5-43) es una identidad, si $(m - 1)$ de los mercados de artículos están en equilibrio, el m también debe estarlo. El sistema de equilibrio general contiene $(m - 1)$ ecuaciones independientes que permiten hallar los valores de las $(m - 1)$ relaciones de cambio. La afirmación de que el mercado de dinero está siempre en equilibrio no aporta ninguna información útil, y los precios absolutos siguen indeterminados. El punto crucial al considerar la ley de Say y el dinero es si este último está incluido o no en las ecuaciones de balance de los consumidores. Si lo está, (5-43) es una condición de equilibrio. Si no, es una identidad.

5-4. La estabilidad del multimercado

En la Sección 4-6, siguiendo los supuestos del análisis del equilibrio parcial, se ignoran los efectos que la perturbación de un mercado puede producir en los equilibrios de los demás. El análisis de equilibrio general exige un reconocimiento explícito de la naturaleza interrelacionada de todos los mercados. El exceso de demanda de cada bien es función de los precios de todos los demás. La perturbación de un mercado apartará a otros del equilibrio. La estabilidad de cada mercado depende de los ajustes que sigan a las perturbaciones inducidas de otros mercados. En la Sección presente se generalizan las dos condiciones de estabilidad de un mercado único, la estática y la dinámica, a un sistema de multimercado. Las condiciones estáticas se llaman a menudo Hicksianas en honor de su formulador, J. R. Hicks. En toda la presente sección se emplean los supuestos de conducta de Walras (véase Sección 4-6).

La estabilidad estática. — Volvamos al supuesto de que el sistema de multimercado no contiene dinero. Sirvámonos de Q_1 como numerario y hagamos su precio idénticamente igual a la unidad.

La condición de estabilidad de un sistema de dos mercados es la misma que la de uno solo. Existe solamente una ecuación independiente y un solo precio variable: $E_1 = E_1(p_2)$ y $E_2 = E_2(p_2)$. La ecuación de balance total, $E_1 + p_2E_2 = 0$ se satisface siempre. El relajamiento de la condición de equilibrio de Q_2 de modo que $E_2 \neq 0$, implica necesariamente que se relaje la condición de equilibrio de Q_1, de forma que $dE_1 + p_2dE_2 = 0$. Las diferenciales dE_1 y dE_2 y, por tanto, las derivadas dE_1/dp_2 y dE_2/dp_2 deben ser de signo contrario excepto en el caso trivial en que ambos sean nulos. El equilibrio es estable de acuerdo con el supuesto estático de Walras si $dE_2/dp_2 < 0$ (o de modo equivalente si $dE_1/dp_2 > 0$). Si en el mercado de Q_2 se restablece el equilibrio, se restablece automáticamente el equilibrio del *numerario*, o sea si E_2 se iguala a cero, E_1 también debe igualarse. Los problemas específicos de la estabilidad del multimercado surgen únicamente en sistemas de 3 o más mercados interrelacionados.

Si $\partial E_k/\partial p_j \neq 0$ un desplazamiento del equilibrio del mercado de Q_j causará un desplazamiento del equilibrio en el mercado de Q_k. La estabilidad de Walras de un mercado aislado requiere que $\partial E_j / \partial p_j < 0$ donde $\partial E_j / \partial p_j$ es una derivada parcial y se supone que los demás precios permanecen invariables. Para el análisis del multimercado debe utilizarse la derivada total dE_j / dp_j. Su valor puede calcularse bajo cierto número de supuestos alternativos sobre el ajuste de los otros mercados. Una posibilidad consiste en suponer que el equilibrio se restablece en todos los mercados distintos a Q_j y al numerario.[9] Existen otras formas posibles de ajuste de precios, aparte del de inflexibilidad completa, en que ninguno de los otros $(m - 2)$ mercados se ajusta, y existe también el caso de flexibilidad completa, en el que se ajustan todos. En general, puede imaginarse un sistema con M "precios rígidos" que no modifican sus valores iniciales de equilibrio durante el periodo que se considera, donde M puede ser cualquier número desde 1 hasta $(m - 1)$. Como resultado de esta definición, el precio del *numerario* es siempre rígido.

9. Puesto que la ecuación de balance total se satisface siempre, $p_jE_j + E_1 = 0$ si Q_1 es el *numerario*. La violación de la condición de equilibrio para el *numerario* proporciona el relajamiento necesario para permitir que Q_j tome un valor distinto a cero.

Las condiciones de estabilidad más taxativas del mercado de Q_j $(j \neq 1)$ exigen que la derivada total dE_j / dp_j sea negativa para todas las posibles combinaciones de precios, rígidos y flexibles. El mercado de Q_j es perfectamente estable en el sentido Hicksiano, si $dE_j/dp_j < 0$ bajo las siguientes condiciones: 1.ª si todos los $(m - 1)$ precios distintos a p_j son rígidos; 2.ª si $(m - 2)$ de los precios son rígidos, pero p_k es flexible y se ajusta de tal modo que $E_k = 0$; 3.ª si $(m - 3)$ de los precios son rígidos, pero p_h y p_k son flexibles y se ajustan de tal modo que $E_h = 0$ y $E_k = 0$, y así hasta el caso final en el que los precios de todos los bienes distintos al *numerario* son flexibles. En conjunto, el sistema es perfectamente estable si los $(m - 1)$ mercados de los bienes distintos al *numerario* son perfectamente estables.

Las funciones de exceso de demanda de un sistema con m bienes son:

$$E_j = E_j (p_2, \ldots, p_m) \qquad (j = 2, \ldots, m) \tag{5-45}$$

La función de exceso de demanda del numerario puede omitirse, puesto que se puede derivar de las restantes $(m - 1)$. Los efectos de los cambios de precio sobre los excesos de demanda se calculan por diferenciación total de (5-45),

$$\begin{aligned} dE_2 &= b_{22}\, dp_2 + b_{23}\, dp_3 + \ldots + b_{2m}\, dp_m \\ dE_3 &= b_{32}\, dp_2 + b_{33}\, dp_3 + \ldots + b_{3m}\, dp_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dE_m &= b_{m2}\, dp_2 + b_{m3}\, dp_3 + \ldots + b_{mm}\, dp_m \end{aligned} \tag{5-46}$$

donde $b_{jk} = \partial E_j / \partial p_k$. Como se puede suponer constante en la proximidad del punto de equilibrio, (5-46) forma un sistema de $(m - 1)$ ecuaciones lineales simultáneas con $(m - 1)$ variables $(dp_2, \ldots, dp_m)$. Los coeficientes de (5-46) forman el Jacobiano (véase Sección A-3) de $(E_2, \ldots, E_m)$ con respecto a $(p_2, \ldots, p_m)$.

Consideremos el caso en el que el punto de equilibrio se desplaza en el mercado de Q_j y que todos los demás precios son rígidos. Sustituyendo $dp_k = 0$ para $(k = 2, \ldots, m)$ y $(j \neq k)$ en (5-46), la $(j - 1)$ª ecuación se convierte en [10]

$$dE_j = b_{jj}\, dp_j$$

10. Un desplazamiento del equilibrio en el mercado de Q_j causará desplazamientos de los equilibrios de los demás mercados. Las otras ecuaciones de (5-46) se convierten en

$$dE_k = b_{kj}\, dp_j$$

Puesto que los demás precios se suponen rígidos, estos desplazamientos no influirán existiendo excesos de demanda distintos de cero.

Dividiéndolo todo por ∂p_j, la primera condición para la estabilidad perfecta del mercado de Q_j es

$$\frac{dE_j}{dp_j} = b_{jj} < 0 \tag{5-47}$$

La condición (5-47) es idéntica a la exigencia de estabilidad de un mercado aislado. La estabilidad perfecta del sistema en bloque, requiere que (5-47) se mantenga para ($j = 2, \ldots, m$), y así la primera condición de perfecta estabilidad, implica la estabilidad aislada de cada mercado del sistema.

Consideremos ahora el caso en el que el equilibrio se desplaza del mercado de Q_j. p_h se ajusta, y todos los demás precios son rígidos. Sustituyendo $dE_h = 0$ y $dp_k = 0$ para ($k \neq j, h$) en (5-46), las ecuaciones Q_j y Q_h se convierten

$$\begin{aligned} dE_j &= b_{jj}\, dp_j + b_{jh}\, dp_h \\ 0 &= b_{hj}\, dp_j + b_{hh}\, dp_h \end{aligned}$$

Usando la regla de Cramer para hallar el valor de dp_j,

$$dp_j = \frac{\begin{vmatrix} dE_j & b_{jh} \\ 0 & b_{hh} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix}} = dE_j \frac{b_{hh}}{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix}}$$

Dividiéndolo todo por el término constante de la derecha y por dp_j, la segunda condición de estabilidad perfecta del mercado de Q_j es

$$\frac{dE_j}{dp_j} = \frac{\begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix}}{b_{hh}} < 0 \tag{5-48}$$

La estabilidad perfecta del mercado Q_h requiere que el denominador de (5-48) sea negativo. Por tanto, la perfecta estabilidad del sistema en bloque, requiere que el numerador de (5-48) sea positivo.

Finalmente, consideremos el caso en el que el equilibrio se desplaza de Q_j, p_h y p_i se ajustan, y los restantes $(m - 4)$ precios son rígidos. Sustituyendo $dE_h = dE_i = 0$ y $dp_k = 0$ para los restantes $(m - 4)$ precios en (5-46), las ecuaciones relevantes pasan a ser

$$\begin{aligned} dE_j &= b_{jj}\, dp_j + b_{jh}\, dp_h + b_{ji}\, dp_i \\ 0 &= b_{hj}\, dp_j + b_{hh}\, dp_h + b_{hi}\, dp_i \\ 0 &= b_{ij}\, dp_j + b_{ih}\, dp_h + b_{ii}\, dp_i \end{aligned}$$

Usando la regla de Cramer para hallar el valor de dp_j.

$$dp_j = \begin{vmatrix} dE_j & b_{jh} & b_{ji} \\ 0 & b_{hh} & b_{hi} \\ 0 & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} & b_{ji} \\ b_{hj} & b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ij} & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix}$$

Desarrollando el numerador por su primera columna y hallando el valor de dE_j/dp_j, la tercera condición de estabilidad perfecta del mercado de Q_j es:

$$\frac{dE_j}{dp_j} = \begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} & b_{ji} \\ b_{hj} & b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ij} & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix} < 0 \qquad (5\text{-}49)$$

Haciendo $j = h$ y $h = i$, según la exigencia de (5-48), la estabilidad perfecta del mercado de Q_h requiere que el denominador de (5-49) sea positivo. Por tanto, la perfecta estabilidad del sistema en bloque requiere que el numerador de (5-49) sea negativo.

La perfecta estabilidad del bloque del sistema requiere que los determinantes jacobianos de orden $[1, 2, 3, ..., (m-1)]$:

$$b_{jj}, \begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} \\ b_{hj} & b_{hh} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_{jj} & b_{jh} & b_{ji} \\ b_{hj} & b_{hh} & b_{hi} \\ b_{ij} & b_{ih} & b_{ii} \end{vmatrix}, \ldots \qquad (5\text{-}50)$$

sean alternativamente negativos y positivos para todos los valores de $j, h, i, ...$

Las condiciones de estabilidad perfecta son más fuertes que lo necesario para la consideración de muchos sistemas de multimercado. Si el sistema no contiene precios rígidos, el único valor relevante de dE_j/dp_j es el calculado en el supuesto que los restantes $(m-2)$ mercados se ajusten. Siguiendo el proceso de cálculo esbozado arriba, el mercado de Q_2 es estable si

$$\frac{dE_2}{dp_2} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}_{22}} < 0 \qquad (5\text{-}51)$$

donde $\mathbf{B}$ es el determinante jacobiano del sistema completo dado por (5-40), y $\mathbf{B}_{22}$ es el adjunto de b_{22}. En la terminología de Hicks, el sistema en bloque es *imperfectamente estable*, si se mantiene una condición parecida a los (5-51) para todos los bienes distintos al *numerario*. Es interesante notar que la estabilidad imperfecta no implica necesariamente la estabilidad aislada de cada uno de los mercados.

Consideremos las siguientes funciones de exceso de demanda de unos sistemas de tres artículos:

(1) $E_2 = -2p_2 + 3p_3 - 5 \qquad E_3 = 4p_2 - 8p_3 + 16$
(2) $E_2 = 2p_2 - 3p_3 + 5 \qquad E_3 = -4p_2 + 4p_3 - 4$
(3) $E_2 = 2p_2 + 3p_3 - 13 \qquad E_3 = 4p_2 - 8p_3 + 16$

En los tres ejemplos, los precios de equilibrio son: $p_2 = 2$ y $p_3 = 3$. El primer sistema satisface todas las condiciones de la estabilidad perfecta:

$$\frac{dE_2}{dp_2} = \frac{\partial E_2}{\partial p_2} = -2 < 0 \qquad \frac{dE_2}{dp_2} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}}{-8} = -0{,}5 < 0$$

$$\frac{dE_3}{dp_3} = \frac{\partial E_3}{\partial p_3} = -8 < 0 \qquad \frac{dE_3}{dp_3} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}}{-2} = -2 < 0$$

El segundo sistema, satisface las condiciones de estabilidad imperfecta, pero no las de la perfecta:

$$\frac{dE_2}{dp_2} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}}{4} = -1 < 0 \qquad \frac{dE_3}{dp_3} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}}{2} = -2 < 0$$

Los mercados de Q_2 y Q_3 son inestables cuando se consideran aisladamente, pero el sistema en conjunto es estable si ambos precios se ajustan. El tercer sistema no satisface las condiciones de estabilidad perfecta ni imperfecta.

Estabilidad dinámica. — Las condiciones de estabilidad dinámica de un sistema de multimercado, representan una generalización de la condición de estabilidad dinámica de un mercado único. Se introduce una afirmación explícita de las leyes de cambio de precio, y se investigan los procesos temporales de los precios que siguen alguna perturbación. Para describir la conducta de los participantes en sistemas particulares, se pueden introducir muchos tipos diferentes de procesos de ajuste dinámico. En general, el equilibrio de un multimercado es estable dinámicamente si después de un ligero desplazamiento del equilibrio cada precio con el transcurso del tiempo se acerca a su nivel de equilibrio, por ejemplo, si

$$\lim_{t \to \infty} p_{jt} = p_j^0 \qquad (j = 2, \ldots, m) \tag{5-52}$$

donde p_{it} es el precio de Q_i en el tiempo t y p_i^e es el precio de equilibrio de Q_i.

Gran parte de las matemáticas necesarias para un desarrollo completo de la estabilidad dinámica, están fuera del alcance de este volumen, pero se puede indicar la naturaleza general del análisis con la ayuda de un ejemplo lineal para un sistema de tres artículos:

$$\begin{aligned} E_{2t} &= a_{22}\, p_{2t} + a_{23}\, p_{3t} + a_{20} \\ E_{3t} &= a_{32}\, p_{2t} + a_{33}\, p_{3t} + a_{30} \end{aligned} \tag{5-53}$$

Se pueden calcular los precios de equilibrio igualando a cero E_{2t} y E_{3t} y hallando los valores de p_{2t} y de p_{3t}:

$$p_2^e = \frac{a_{23}a_{30} - a_{33}a_{20}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} \qquad p_3^e = \frac{a_{32}a_{20} - a_{22}a_{30}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} \tag{5-54}$$

Supongamos que las leyes dinámicas del ajuste de precio vienen dadas por las ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} p_{2,t+1} - p_{2t} &= kE_{2t} \\ p_{3,t+1} - p_{3t} &= kE_{3t} \end{aligned} \tag{5-55}$$

donde $k > 0$ es el "grado de ajuste", o sea la cantidad en que aumentará (o disminuirá) el precio, por unidad de exceso de demanda. El proceso de ajuste de precio descrito por (5-55) sigue los supuestos de conducta de Walras. Un exceso de demanda positivo, significa que al precio vigente los compradores desean comprar más de lo que se ofrece. La competencia entre los compradores conducirá entonces a un aumento del precio. Un exceso de demanda negativo significa que al precio vigente los vendedores ofrecen más de lo que los compradores desean comprar. La competencia entre ellos hará disminuir el precio. Si ambos mercados están en equilibrio, no cambiará ningún precio, o sea si el exceso de demanda de cada bien es igual a cero. El "grado de ajuste" no necesita ser el mismo para ambos mercados, pero no se pierde en generalidad suponiendo que lo es, puesto que las unidades en las que se miden los bienes son arbitrarias.

Substituyamos los valores de los excesos de demanda de (5-53) en (5-55), y escribamos las ecuaciones en forma implícita:

$$\begin{aligned} p_{2,t+1} - (1 + ka_{22})\, p_{2t} - ka_{23}\, p_{3t} - ka_{20} &= 0 \\ p_{3,t+1} - (1 + ka_{33})\, p_{3t} - ka_{32}\, p_{2t} - ka_{30} &= 0 \end{aligned} \tag{5-56}$$

Hallemos en (5-56) el valor de p_{2t}:

$$p_{2t} = \frac{1}{ka_{32}}\, p_{3,t+1} - \frac{1 + ka_{33}}{ka_{32}}\, p_{3t} - \frac{a_{30}}{a_{32}} \tag{5-57}$$

Ahora, substituyamos los valores de p_{2t} y $p_{2,t+1}$ dados por (5-57) en la primera ecuación de (5-56):

$$p_{3,t+2} + \alpha_3 \, p_{3,t+1} + \beta_3 \, p_{3t} + \gamma_3 = 0 \qquad (5\text{-}58)$$

donde $\alpha_3 = -(2 + ka_{33} + ka_{22})$

$\beta_3 = 1 + ka_{33} + ka_{22} + k^2 \, a_{22} \, a_{33} - k^2 \, a_{23} \, a_{32}$

$\gamma_3 = k^2 \, a_{22} \, a_{30} - k^2 \, a_{32} \, a_{20}$

El proceso del precio de Q_3 a través del tiempo se describe por una ecuación diferencial de segundo grado no homogénea de coeficientes constantes. La solución de (5-58) (véase sección A-6) es:

$$p_{3t} = A_3 \sigma_{31}{}^t + B_3 \sigma_{32}{}^t + \frac{a_{32} \, a_{20} - a_{22} \, a_{30}}{a_{22} \, a_{33} - a_{23} \, a_{32}} \qquad (5\text{-}59)$$

donde σ_{31} y σ_{32} son las raíces de la parte homogénea de (5-58), y A_3 y B_3 son constantes determinadas por las condiciones iniciales. El término constante de (5-59) es el precio de equilibrio de Q_3 dado por (5-54). [11]

Se puede describir el desarrollo temporal de p_{2t} por una ecuación parecida a la (5-59). Substituyendo $p_3{}^e$ en el término constante de (5-59), y escribiendo una ecuación similar para el precio de Q_2,

$$\begin{aligned} p_{2t} &= A_2 \, \sigma_{21}{}^t + B_2 \, \sigma_{22}{}^t + p_2{}^e \\ p_{3t} &= A_3 \, \sigma_{31}{}^t + B_3 \, \sigma_{32}{}^t + p_3{}^e \end{aligned} \qquad (5\text{-}60)$$

El sistema es estable dinámicamente y p_{2t} y p_{3t} se acercarán con el tiempo a sus valores de equilibrio, si $-1 < \sigma_{ij} < 1$ $(i = 2, 3)$ y $(j = 1, 2)$. Los valores absolutos de las raíces de las partes homogéneas de (5-58), y la correspondiente ecuación de Q_2, deben ser menores que la unidad.

Las raíces σ_{ij}, y por tanto la estabilidad dinámica, dependen del "grado de ajuste" al igual que los coeficientes de las ecuaciones del exceso de demanda. La estabilidad hicksiana depende solamente de los valores de los coeficientes. Un sistema que satisfaga las condiciones hicksianas de estabilidad perfecta, se demostrará inestable dinámicamente para algunos valores de k. Consideremos el sistema dado por

$$\begin{aligned} E_2 &= -2 \, p_2 + 3 \, p_3 - 5 \\ E_3 &= 4 \, p_2 - 8 \, p_3 + 16 \end{aligned}$$

11. El lector puede comprobarlo sustituyendo $p_{3t} = K$ en (5-58) y hallando

$$K + \alpha_3 K + \beta_3 K + \gamma_3 = 0$$

el valor de K

12

que se demostró que satisfacía las condiciones de estabilidad perfecta de Hicks. Supongamos que el proceso de ajuste dinámico viene descrito por (5-55). Para este ejemplo (5-58) se convierte en

$$p_{3t+2} + (10\,k - 2)\,p_{3,t+1} + (4\,k^2 - 10\,k + 1)\,p_{3t} - 12\,k^2 = 0$$

Las raíces de la parte homogénea son:

$$\sigma_{31} = -0{,}41\,k + 1 \qquad \sigma_{32} = -9{,}58\,k + 1$$

donde $k > 0$, σ_{31} y $\sigma_{32} < 1$ para todos los posibles grados de ajuste y el mercado de Q_3 es estable dinámicamente si el valor de k es tal que ambas raíces son mayores que —1. *Puesto que* $\sigma_{32} < \sigma_{31}$, *la estabilidad dinámica* requiere que $\sigma_{32} > -1$, o equivalentemente que $k < 0{,}21$. Si k fuese mayor que 0,21, el mercado Q_3 se caracterizaría por un sobreajuste por parte de compradores y vendedores. y p_{3t} exhibiría fluctuaciones cada vez mayores alrededor de p_3^e.

5-5. Soluciones

La mera formulación de un sistema de multimercado, no garantiza la existencia de una solución de equilibrio. Algunos sistemas no tienen solución matemática; otros, tienen muchas. La existencia de una solución matemática puede no ser adecuada. La economía impone restricciones sobre la admisibilidad de los valores de las variables. Los precios deben ser números reales no negativos.[12] Aún más; los valores de consumo de cada consumidor, y los niveles de input y output de cada empresa deben ser no negativos. Una solución matemática que contenga, por ejemplo, niveles de consumo negativos, es absurda.

La cuestión de la existencia de una solución admisible, se puede considerar en dos niveles distintos. Se puede desear el determinar si un sistema de multimercado de representaciones numéricas concretas tiene o no solución admisible. En un nivel más general, se puede probar un

12. Si el precio de un bien fuese negativo, el poder adquisitivo, en vez de transferirse de compradores a vendedores, se haría de vendedores a compradores. Los precios negativos no siempre son absurdos. La posesión de un disbien tal como las basuras reducirá el nivel de utilidad del consumidor, y, generalmente, deseará pagar y sacárselo de encima. La posibilidad de precios negativos con sentido se elimina centrando la atención sobre el bien contrapartida del disbien. Se puede considerar que el consumidor no vende basuras, sino que compra servicio de alejamiento de basuras, y que el basurero no compra basura sino que vende servicio de recolección de basura. El precio del servicio de recolección de basura es positivo e igual en valor absoluto al precio negativo de la basura.

teorema existente que establezca que existen soluciones admisibles para todos los sistemas de multimercados, que satisfagan cierto número de condiciones generales.

SOLUCIONES DE SISTEMAS PARTICULARES. — En general, una solución para N ecuaciones con N variables, existe si su jacobiano no se desvanece en un pequeño contorno (véase Sección A-3). El sistema de m ecuaciones obtenido igualando a cero los excesos de demanda, no se puede resolver para los valores absolutos de los m precios. Puesto que la ecuación de balance total se satisface siempre, los excesos de demanda son dependientes funcionalmente, y sus jacobianos se desvanecen de modo idéntico. La no existencia de una solución para *los precios absolutos*, es absurda desde el punto de vista económico, puesto que los excesos de demanda son homogéneos de grado cero en todos los precios.

Haciendo $p_1 = 1$ y omitiendo la ecuación de exceso de demanda de Q_1, el sistema se reduce a $(m - 1)$ ecuaciones con $(m - 1)$ precios variables. Hasta ahora, se ha supuesto que estas ecuaciones son independientes y que existe una solución para el sistema reducido. Este supuesto no se cumple necesariamente. Consideremos el sistema reducido de tres artículos dado por

$$E_2 = -2\,p_2 - 4\,p_3 + 10 = 0$$
$$E_3 = -3\,p_2 - 6\,p_3 + 15 = 0$$

El jacobiano de este sistema desaparece idénticamente, y no se pueden hallar los valores de p_2 y p_3. Las funciones de exceso de demanda de Q_2 y Q_3, no son independientes. En este caso, la dependencia funcional es $E_3 = 1{,}5E_2$. La sociedad en bloque siempre demanda y ofrece Q_2 y Q_3 en una proporción fija. Cualquier serie de valores de p_2 y p_3 que satisfaga $p_2 = 5 - 2p_3$ redundará en equilibrio del multimercado. ($p_2 = 1$, $p_3 = 2$) y ($p_2 = 3$, $p_3 = 1$) son ejemplos de ello.

Cada uno de los sistemas de multimercado numérico se puede tratar individualmente. Apliquemos primero la condición jacobiana indeleble para determinar si existe una solución matemática. Si hay una, resolvamos el sistema y examinemos su solución (*s*) desde el punto de vista de su admisibilidad.

TEOREMAS DE LA EXISTENCIA. — El método de solución individual no sirve si se desea considerar el problema de la existencia para sistemas de multimercado en abstracto que no tienen significación numérica. Se debe probar un teorema de existencia general. Los teoremas de existencia se han probado para cierto número de tipos de sistemas de multimercado, incluyendo sistemas en los que las funciones de producción se formulan como combinaciones de actividades lineales [13] y el sistema de input-output. [14]

Arrow y Debreu han considerado que el problema de la existencia para sistemas de multimercado en abstracto es parecido al presentado en la sección 5-2. [15] Su análisis difiere del de la Sección 5-2 en que ellos emplean técnicas (*set-theoretical*) más que cálculo diferencial. Sus supuestos para el primero de los dos casos que ellos consideran es aproximadamente como sigue: 1.º ninguna empresa lleva a cabo rendimientos

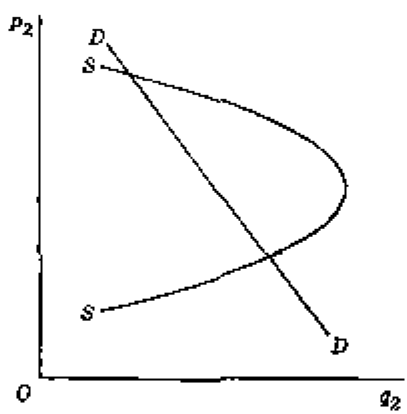


FIGURA 5-2

crecientes; 2.º para la producción de cada artículo es necesario, al menos, un factor primario; 3.º la cantidad de cada factor primario ofrecida por un consumidor no puede exceder su dotación inicial; 4.º la función de utilidad ordinal de cada consumidor es continua; 5.º los deseos de los consumidores no pueden saturarse; 6.º las superficies de indiferencia son convexas respecto al origen, y 7.º cada consumidor puede ofrecer todos los factores primarios. Arrow y Debreu han probado que las soluciones de equilibrio competitivo existen para todos los sistemas que satisfagan estos supuestos. Ellos debilitan el supuesto 7.º en la segunda de las pruebas de existencia.

13. Véase R. Dorfman, P. Samuelson, y R. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis* (New York: Mc. Graw-Hill, 1958), chap. XIII.

14. Se prueba un teorema de la existencia de input-output para el caso de dos bienes. Véase, más adelante, la sección 5-6.

15. Kenneth J. Arrow y Gerard Debreu, "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", *Econometrica*, vol. 22. (julio, 1954), pp. 265-290.

Un teorema de existencia se basa más en una suficiencia que en un argumento de necesidad. Todos los sistemas que satisfagan estas condiciones tienen soluciones de equilibrio, pero se podrían construir ejemplos de sistemas que no satisficiesen estas condiciones y que, en cambio, poseyesen también soluciones de equilibrio.

SOLUCIONES MÚLTIPLES. — Un teorema de existencia no prueba su unicidad. Un sistema de multimercado puede tener más de una solución admisible. Una función de exceso de demanda de segundo grado para un sistema de dos artículos, puede ilustrar alguna de las consecuencias

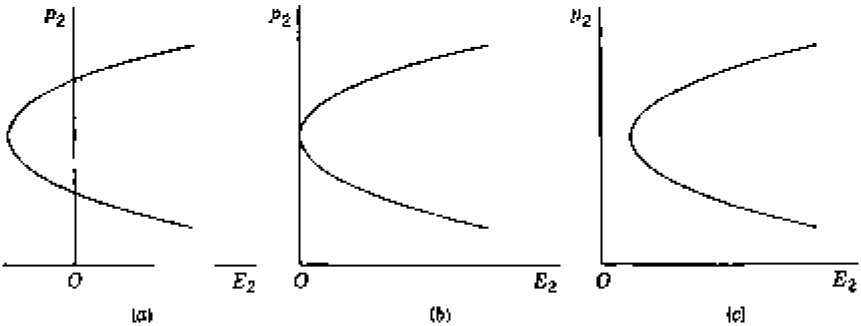


FIGURA 5-3

de las soluciones múltiples. Las funciones de 2.° grado pueden surgir bajo muchas circunstancias. La curva de oferta de un factor tal como trabajo puede ser (backward-bending), como se ilustra en la figura 5-2. En niveles de salario bajo la curva de oferta de trabajo tiene pendiente positiva. Un incremento de salario induciría a los consumidores a aumentar su oferta de trabajo y por tanto a aumentar sus rentas en artículos. En niveles de salario más altos la curva de oferta dará la vuelta y será de pendiente negativa. Un salario alto y una renta igualmente alta en artículos inducirá a los consumidores a disminuir su oferta de trabajo y a aumentar su consumo de ocio. Las curvas de demanda y oferta dibujadas en la figura 5-2 dan la curva de exceso de demanda de trabajo dibujada en la figura 5-3*a*.

Consideremos un sistema de dos artículos en el que un bien de consumo, Q_1, sirve como numerario y Q_2 es trabajo. La función de exceso de demanda de trabajo correspondiente a la figura 5-3*a* es

$$p_2^2 - 14\,p_2 + 40 = 0$$

con las raíces $p_2 = 4$ y $p_2 = 10$. Ambas raíces son reales y positivas y satisfacen las exigencias de un equilibrio competitivo. Como de costumbre, los equilibrios estables e inestables se alternan (véase sección 4-6). La solución $p_2 = 4$ es estable y la $p_2 = 10$ inestable: $E_2'(4) =$ 6 y $E_2'(10) = 6$

La función de exceso de demanda de trabajo correspondiente a la figura 5-3*b* es

$$p_2^2 - 14\,p_2 + 49 = 0$$

con las raíces iguales $p_2 = 7$. Existe un solo punto de equilibrio del multimercado. La curva de exceso de demanda es tangente al eje vertical en $p_2 = 7$ y está a la derecha para todos los restantes valores de p_2. La estabilidad de esta solución única está en entredicho puesto que $E_2'(7) = 0$. La representación gráfica sugiere que es estable para perturbaciones del precio hacia abajo e inestable para perturbaciones de precio hacia arriba.

Finalmente, la función de exceso de demanda de trabajo correspondiente a la figura 5-3*c* es

$$p_2^2 - 14\,p_2 + 53 = 0$$

Las raíces de esta función son las conjugadas complejas. $p_2 = 7 \pm 4\sqrt{-1}$.

Los precios de componentes imaginarias son absurdos, y no existe solución admisible del sistema. La curva de exceso de demanda de trabajo está a la derecha del eje verticial. En cada nivel de salarios la cantidad de trabajo que los consumidores ofrecen es menor que la que los empresarios demandan. En tal mercado, no puede conseguirse el equilibrio.

Los problemas de las soluciones múltiples son similares en sistemas que contengan más de dos artículos. Consideremos el sistema de tres artículos dado por

$$\begin{aligned} E_2 &= 2\,p_2^2 + 22\,p_2 - 13\,p_2\,p_3 - 64\,p_3 + 20\,p_3^2 + 48 = 0 \\ E_3 &= p_2 - 2\,p_3 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene dos soluciones: $(p_2 = 4, p_3 = 3)$ y $(p_2 = 2, p_3 = 2)$. La regla de equilibrios estables e inestables alternativamente. El equilibrio del mercado de Q_2 considerado aisladamente es estable para $p_2 = 4$ e inestable para $p_2 = 2$. La solución $(p_2 = 4, p_3 = 3)$ satisface las condiciones de estabilidad perfecta de Hicks. La solución $(p_2 = 2, p_3 = 2)$, no satisface ni las condiciones de estabilidad perfecta ni la de la imperfecta.

Aplicaciones empíricas. — El análisis del equilibrio de un multimercado presenta un cuadro muy general de las interrelaciones de los mercados en economía, pero es tan general que resulta de poca aplicación en estudios empíricos. Un sistema simple con dos factores, 50 artículos, 10.000 consumidores, y 2000 empresas, incluye más de 200.000 funciones de exceso de demanda individuales. Las soluciones numéricas están fuera de lugar para sistemas de este tamaño aunque se pudiesen obtener los datos necesarios. Si el economista desea hacer aplicaciones empíricas, debe tratar con la versión algo simplificada del análisis del equilibrio parcial o una versión mayormente simplificada del análisis del equilibrio general.

5-6. El sistema de input-output

El *sistema de input-output tal como ha sido desarrollado por Wassily W. Leontief* es un análisis de multimercado orientado empíricamente. Sus supuestos representan una simplificación considerable del análisis del equilibrio general del multimercado. Se omiten las funciones de utilidad, y se establecen las demandas de los consumidores sobre las bases de la información exterior, sin tener en cuenta el equilibrio de los consumidores individuales. La unidad de producción, más que la empresa, es la industria. La función de producción de cada industria es del tipo de coeficiente constante, y no hay problemas de optimización en la esfera productiva. En general, el análisis de input-output supone alejados los problemas del equilibrio. Sin embargo, sus supuestos de simplificación no quedan sin contrapartida. Se transforma el análisis del equilibrio del multimercado muy general, pero empíricamente estéril, en un modelo capaz de representación empírica. El sistema de input-output proporciona respuestas numéricas a cierto número de interesantes problemas que envuelve la economía en bloque.

Los flujos interindustriales. — El primer paso del análisis de input-ouput, es obtener una exposición detallada de los flujos de bienes y servicios en cierto año base. La actividad económica se clasifica en sectores endógenos y exógenos. Los sectores endógenos son las industrias productivas que usan factores primarios y sus propios outputs como inputs. Los sectores exógenos proporcionan factores primarios y consumen los outputs de las industrias primitivas. A veces es conveniente agrupar todos los sectores exógenos en un *solo sector de demanda final* para un análisis de su consumo. El sector de demanda final no está definido de un modo único. Generalmente incluye arrendatarios de viviendas, gobierno, y comercio exterior. Puesto que el modelo es estático no se incluyen inversiones ni cambio.

Uno o más de estos factores se puede considerar como endógeno cuando convenga.[16]

El output total (q_i) del bien producido Q_i es igual a la suma de los flujos de Q_i a las industrias productivas y a la demanda final:

$$q_i = q_{i1} + \cdots + q_{im} + \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{5-61}$$

donde q_{ij} es el flujo de Q_i a la industria j^a y α_i es el flujo a la demanda final. Se supone que cada industria produce un solo producto homogéneo, y los flujos se pueden medir bien en unidades físicas o bien en valores de año base.

También se usan como input los r factores primarios. La cantidad total del factor primario i^o usado durante el año base es la suma de las cantidades usadas por cada una de sus m industrias:

$$q_i = q_{i1} + \cdots + q_{im} \qquad (i = m + 1, \ldots, m + r) \tag{5-62}$$

Las cantidades de los factores se miden también en valores de año base.

En la tabla 5-1 se representan los flujos por año base de un sistema hipotético que contiene dos industrias endógenas y un factor. Sus filas describen la distribución del ouput de una industria, y sus columnas las adquisiciones de input. Leyendo a lo largo de la primera fila, la industria 1 usa 2000 dólares en sus outputs como input de otra industria, entrega 6400 a la industria 2 y 1600 a la demanda final. Leyendo la primera columna, los inputs de la industria 1 consisten en 2000 dólares gastados en su propio output, 6000 en el ouput de la industria 2 y 2000 en el factor. Se supone que la economía está en equilibrio a largo plazo, y los costes de cada industria, incluyendo los beneficios normales, son iguales a sus ingresos. Por tanto, el output total de una industria se puede obtener también sumando los valores de sus inputs, incluyendo el factor primario empresarial.

TABLA 5-1. FLUJOS DEL AÑO BASE

	1	2	Demanda final	Output total
1	$2.000	$6.400	$1.600	$10.000
2	6.000	4.800	5.200	16.000
3	2.000	4.800		

[16] Un sistema de input-output "abierto" contiene uno o más sectores exógenos. En un sistema "cerrado", todos los sectores son endógenos. Casi todos los análisis corrientes son de sistemas "abiertos", y la descripción del texto se limita a este caso. Se remite al lector interesado en las propiedades de un sistema cerrado a Wassily W. Leontief, *The Estructure of American Economy, 1919-1939* (2.ª ed.; New York: Oxford University Press, 1951).

ASPECTOS ANALÍTICOS. — Se supone que los inputs se combinan en proporciones fijas para la producción de cada uno de los m outputs endógenos:

$$q_{ij} = a_{ij} q_j \qquad \begin{matrix} (i = 1, \ldots, m + r) \\ (j = 1, \ldots, m) \end{matrix} \tag{5-63}$$

donde a_{ij} es la cantidad de Q_i necesaria para la producción de una unidad de Q_j. Los coeficientes de producción se pueden obtener de la tabla de flujo de año base, dividiendo los componentes de cada columna de una industria exógena por el output total de la industria. La tabla 5-2

TABLA 5-2. COEFICIENTES DE INPUT-OUTPUT

Industria	1	2
1	0,2	0,4
2	0,6	0,3
3	0,2	0,3

contiene los coeficientes del sistema hipotético. Si el supuesto de coeficientes constantes es correcto, se necesitan 0,2 unidades (2000/10.000) de Q_1, 0,6 de Q_2, y 0,2 de Q_3 para producir una unidad de Q_1.

Sustituyendo las relaciones de producción de (5-63) en las ecuaciones de flujo (5-61):

$$q_i - a_{i1} q_1 - \ldots - a_{ii} q_i - \ldots - a_{im} q_m = \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

Agrupando términos,

$$-a_{i1} q_1 - \ldots + (1 - a_{ii}) q_i - \ldots - a_{im} q_m = \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{5-64}$$

que da un sistema de m ecuaciones lineales no homogéneas con m outputs totales como variables y las m demandas finales como constantes.

Usando la regla de Kramer para hallar el valor de q_j en (5-64)

$$q_j = \frac{\mathbf{A}_j}{\mathbf{A}} \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

donde $$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} & \ldots & -a_{1m} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) & \ldots & -a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{m1} & a_{m2} & \ldots & (1 - a_{mm}) \end{vmatrix}$$

y $\mathbf{A}_j$ es $\mathbf{A}$ con la j^a columna reemplazada por las demandas finales. Se puede generalizar la solución del sistema de input-output desarrollando $\mathbf{A}_j$ por su j^a columna:

$$q_j = \frac{\mathbf{A}_{1j}}{\mathbf{A}} \alpha_1 + \frac{\mathbf{A}_{2j}}{\mathbf{A}} \alpha_2 + \dots + \frac{\mathbf{A}_{mj}}{\mathbf{A}} \alpha_m \qquad (j = 1, \dots, m) \tag{5-65}$$

donde $\mathbf{A}_{ij}$ es el cofactor del elemento de la fila i^a de la columna j^a de $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{A} \neq 0$, se puede resolver el sistema para los outputs totales correspondientes a cualquier serie de demandas finales, o sea si las ecuaciones de (5-64) son independientes. Una vez determinados los outputs totales, las cantidades de los r factores necesarias para sostener una serie particular de demandas finales se calculan fácilmente a partir de (5-62) y (5-63).

El sistema en el ejemplo de dos industrias es

$$\begin{aligned} (1 - a_{11})\, q_1 - a_{12}\, q_2 &= \alpha_1 \\ - a_{21}\, q_1 + (1 - a_{22})\, q_2 &= \alpha_2 \end{aligned}$$

o sustituyendo los valores de los coeficientes de la tabla 5-2,

$$\begin{aligned} 0{,}8\, q_1 - 0{,}4\, q_2 &= \alpha_1 \\ - 0{,}6\, q_1 + 0{,}7\, q_2 &= \alpha_2 \end{aligned}$$

Calculando el determinante de los coeficientes,

$$\mathbf{A} = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}\, a_{21} = 0{,}56 - 0{,}24 = 0{,}32$$

Resolviendo por la regla de Kramer

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{0{,}7}{0{,}32} \alpha_1 + \frac{0{,}4}{0{,}32} \alpha_2 = 2{,}1875\, \alpha_1 + 1{,}2500\, \alpha_2 \\ q_2 &= \frac{0{,}6}{0{,}32} \alpha_1 + \frac{0{,}8}{0{,}32} \alpha_2 = 1{,}8750\, \alpha_1 + 2{,}5000\, \alpha_2 \end{aligned}$$

La solución establece que son necesarias 2,1875 unidades de Q_1 y 1,8750 unidades de Q_2 para asegurar la obtención de 1 unidad de Q_1 de demanda final.

Puesto que las demandas finales se encuentran restringidas a valores no negativos, los outputs totales serán no negativos para todas las series posibles de demandas finales si, y solo si, todos los coeficientes de (5-65) son no negativos. Se prueba fácilmente que los coeficientes de (5-65) son no negativos en el caso de dos industrias si para la producción de cada bien se requiere al menos uno de los factores. En virtud de la definición de las unidades de gasto de dólar, tenemos:

$$a_{11} + a_{21} + a_{31} < 1 \qquad \text{y} \qquad a_{12} + a_{22} + a_{32} < 1$$

Puesto que a_{31}, $a_{32} \neq 0$,

$$1 - a_{11} - a_{21} > 0 \qquad y \qquad 1 - a_{12} - a_{22} > 0$$

y

$$1 - a_{11} > a_{21} \qquad y \qquad 1 - a_{22} > a_{12}$$

Este conjunto de desigualdades, implica que

$$\mathbf{A} = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}\, a_{21} > 0$$

Todos los cofactores de $\mathbf{A}$ son no negativos:

$$\mathbf{A}_{11} = (1 - a_{22}) \geqq 0 \qquad \mathbf{A}_{12} = a_{21} \geqq 0$$
$$\mathbf{A}_{21} = a_{12} \geqq 0 \qquad \mathbf{A}_{22} = (1 - a_{11}) \geqq 0$$

Los coeficientes de (5-65) son razones de número no negativos y positivos, y por tanto son no negativos. Con métodos más avanzados se puede probar para sistemas que contengan más de dos industrias.

5-7. Resumen

El análisis del equilibrio de un multimercado permite la determinación de una serie compatible de precios para todos los bienes. En un sistema de puro cambio los individuos están dotados con stocks de artículos. Cada uno es libre de comprar y vender artículos a los precios vigentes sujeto a su ecuación de balance, que establece que el valor de sus ventas debe igualarse al de sus compras. Las funciones de exceso de demanda individuales se derivan de las condiciones de primer grado de la maximización de la utilidad. Sumando las funciones individuales de cada artículo se obtienen las funciones totales. Todas las funciones individuales y, por tanto, la total, son homogéneas de grado 0 en precios. La conducta del consumidor viene determinada más por las razones de intercambio que por los precios absolutos. El equilibrio del multimercado requiere que el exceso de demanda de cada artículo sea nulo. Solamente $(m - 1)$ de las ecuaciones de limpieza de mercado son independientes, y el sistema se resuelve para la razón de intercambio de cada artículo con un *numerario* seleccionado arbitrariamente.

En la segunda etapa del análisis se introduce la producción. Se supone que las dotaciones de los consumidores consisten en factores primarios que generalmente venden a los empresarios para poder comprar los artículos producidos. Las funciones de exceso de demanda del consumidor de factores y artículos se derivan de sus condiciones de primer grado de maximización de la utilidad. Cada empresario usa a la vez factores y artículos como input para la producción de un solo artículo. Las funciones de exceso de demanda de un empresario de sus inputs se derivan de sus condiciones de primer grado de maximización de beneficio. El exceso de demanda de su output se obtiene sustituyendo los valores de input en la función de producción. Los excesos de demanda del empresario son también homogéneos del grado cero en precios. Sumando las funciones individuales de consumidores y empresarios, se obtienen las funciones de exceso de demanda totales de cada factor y artículo. Se introduce el supuesto de simetría, y los excesos de demanda se convierten en funciones de los precios y del número de empresas de cada industria. El equilibrio a largo plazo requiere que cada mercado se agote y que el beneficio de la empresa representativa de cada industria sea igual a cero. De nuevo una de las ecuaciones de agotamiento de mercado es redundante, y se resuelve el sistema para razones de intercambio y el número de empresas de cada industria.

Las razones de intercambio entre cada par de artículos se pueden determinar de las relativas al *numerario*. El *numerario* puede servir como dinero en el sentido de medida de valor. Su precio se puede hacer igual a la unidad, y expresar todos los precios en función de sus unidades. El dinero como unidad de cuenta abstracta puede servir como medida de valor. Se puede introducir el papel moneda circulante, y su cantidad determinará el nivel de precios absoluto si se interpreta la ley de Say como una condición de equilibrio y se incluye el dinero en las ecuaciones de balance. La cantidad de dinero no puede determinar el nivel de los precios absolutos si se interpreta la ley de Say como una identidad y se excluye el dinero de las ecuaciones de balance.

Las condiciones estática y dinámica de estabilidad del multimercado representan una generalización de la condición de Walras para un solo mercado. La estabilidad perfecta en el sentido estático de Hicks requiere que las derivadas totales dE_j / dp_j $(j = 2, \ldots, m)$ sean negativas para todas las posibles combinaciones de precios rígidos y flexibles. La estabilidad imperfecta requiere que las derivadas totales sean negativas, dado el supuesto de que todos los precios sean flexibles. Un análisis de estabilidad dinámica requiere una exposición explícita de las leyes de ajuste de precio a través del tiempo. Un sistema de multimercado es estable dinámicamente si, después de una perturbación, todos los precios se acercan con el transcurso tiempo a sus valores de equilibrio.

La mera formulación de un sistema de multimercado no asegura que exista una solución de equilibrio. Para determinar su existencia pueden examinarse individualmente los sistemas numéricos particulares. Un teorema de condiciones generales posee soluciones de equilibrio. El análisis del equilibrio del multimercado en forma pura es demasiado complicado para que resulte un instrumento útil para aplicaciones prácticas.

El sistema de input-output representa una aplicación práctica del análisis del multimercado. Se omiten los aspectos de equilibrio. Se divide a la economía en sectores productivos y de demanda final. Para los sectores productivos que suponen funciones de producción de tipo de coeficiente constante. Los valores de los coeficientes de producción se calculan a partir de una tabla de flujo numérico para algún año base. El sistema permite hallar los valores de los outputs de los sectores productivos en términos de sus entregas a los sectores de demanda final, y se pueden determinar los niveles de output necesarios para permitir cualquier serie de entregas a la demanda final.

SELECCIÓN DE CITAS

ALLEN, R. C. D., *Mathematical Economics* (Londres: Macmillan, 1956). En el capítulo X se estudia el equilibrio del multimercado; en el capítulo II el sistema de input-output, y en el XIII la estabilidad del multimercado. Los conceptos matemáticos necesarios, aparte del cálculo, se desarrollan en el texto.

ARROW, KENNETH J., y GERARD DEBREU, *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy*, "Econometrica", vol. 22 (julio 1954), pp. 265-290. Con matemáticas avanzadas se prueban dos teoremas de existencia de equilibrios de multimercado perfectamente competitivos.

HICKS, J. R., *Value and Capital* (2.ª ed.; Oxford: Clarendon Press, 1946). En los capítulos IV-VIII se trata el equilibrio del multimercado. El desarrollo matemático está contenido en el apéndice.

LANGE, OSCAR, *Price Flexibility and Employment* (Bloomington, Ind.: Principia Press, 1945). El texto, no matemático, contiene un acercamiento del equilibrio del multimercado a algunos problemas de política económica. El apéndice contiene un análisis matemático de la estabilidad de multimercado.

—, *Say's Law: A Restatement and Criticism*, en Lange, McIntyre, e Yntema (eds.), "Studies in Mathematical Economics and Econometrics" (Chicago: University of Chicago Press, 1942), pp. 49-68. Una exposición matemática de diversas versiones de la ley de Say y de la posibilidad de introducir el dinero en un sistema de equilibrio de multimercado.

LEONTIEF, WASSILY W., *The Structure of American Economy, 1919-1939* (2.ª edición; Nueva York: Oxford University Press, 1951). Una descripción del sistema de input-output por su propio creador. (Trad. al castellano: Bosch, Barcelona.)

METZLER, LLOYD A., *Stability of Multiple Markets: The Hicks Conditions*, "Econometrica", vol. 13 (octubre 1945), pp. 277-292. Una discusión matemática avanzada de las condiciones hicksiana y dinámica de estabilidad de multimercado.

MOSAK, JACOB L., *General Equilibrium Theory in International Trade* (Bloomington, Ind.: Principia Press, 1944). En los dos primeros capítulos se desarrolla una teoría matemática del equilibrio de multimercado en una economía cerrada.

PATINKIN, DON, *Money, Interest and Prices* (Evanston, Ill.: Row, Peterson, 1956). Un intento de acoplar el equilibrio del multimercado y la teoría monetaria. El análisis matemático está en un apéndice.

SAMUELSON, PAUL A., *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). En el capítulo IX se discute la estabilidad dinámica del multimercado. (Trad. al castellano: El Ateneo, Buenos Aires.)

WALRAS, LÉON, *Elements of Pure Economics*, trad. por William Jaffé (Homewood, Ill.: Irwin, 1954). La exposición original de la teoría del equilibrio del multimercado.

Capítulo 6

COMPETENCIA MONOPOLÍSTICA

Se ha supuesto hasta ahora que las condiciones de competencia perfecta prevalecían en todos los mercados. Una industria en competencia perfecta comprende un gran número de empresas que venden un producto homogéneo. Las actividades de cualquier empresa individual no afectan a los precios de inputs y outputs. Cada empresa se enfrenta con una curva horizontal de demanda y maximiza el beneficio seleccionando el nivel de output cuyo coste marginal es igual al precio de mercado.

Un mercado es monopolísticamente competitivo cuando las actividades de uno o más de sus compradores o vendedores, tienen una perceptible influencia sobre el precio. Tan amplia definición de la competencia monopolística abarca diversos tipos de mercado que pueden especificarse por sucesiva clasificación. Los mercados de outputs e inputs se clasifican habitualmente en relación al número de compradores y vendedores que contienen. Un mercado con un solo vendedor es un monopolio, con dos un duopolio, y con un número reducido, superior a dos, es un oligopolio. Un monopsonio será un mercado con un solo comprador, un duopsonio uno con dos, y un oligopsonio uno con un reducido número de ellos, superior a dos. Es factible cualquier combinación de relaciones entre vendedores y compradores. Un empresario puede ser un competidor perfecto en el mercado de sus inputs y monopolista en el mercado de sus outputs. Igualmente puede actuar como duopsonista en los mercados de sus inputs y oligopolista en el mercado de su output. En realidad, una empresa puede adquirir sus diversos inputs en mercados de organización completamente diferente.

Los mercados de productos se clasifican de acuerdo con el grado de diferenciación del producto. La teoría de la competencia perfecta se basa en la presunción de que todas las empresas de una industria, elaboran un solo producto de características homogéneas y que los compradores no distinguen entre los outputs procedentes de diferentes empresas. No es necesario aguzar mucho la vista para descubrir industrias en las que los productos de las diferentes empresas son estrictamente sustitutivos, pero diferenciados a los ojos de los compradores. Un ejemplo claro es la industria de cigarrillos. Chesterfield y Camel, sin ser un mismo producto, satisfacen una misma necesidad, dependiendo la demanda del uno del precio del otro. La industria del cigarrillo es un oligopolio con diferenciación de producto.

La vigencia de la competencia monopolista no se limita a mercados con un pequeño número de compradores y vendedores. Basta para su existencia la mera diferenciación de productos. Una industria con un gran número de empresas que vendan productos estrechamente relacionados, pero diferenciados, es de competencia monopolística, puesto que cada empresa, aunque pequeña en relación al mercado en conjunto, posee cierto control sobre el precio al que vende.

En el supuesto de que los precios de todos los demás artículos permanezcan invariables, la curva de demanda del mercado, de un artículo, determina las adquisiciones de los consumidores en función del precio. La relación entre el precio y las ventas de un vendedor individual depende de la organización del mercado en el que vende. La curva de demanda de un monopolista es la misma que la correspondiente curva de demanda del mercado. En cambio, la curva de demanda de un productor en competencia perfecta no está en relación directa con la curva de demanda del mercado de su output, puesto que es incapaz de influir en el precio. Su relación precio-ventas se representa por una línea horizontal a la altura del precio de mercado. Si intentara elevar el precio por encima del vigente, sus ventas disminuirían hasta cero. A este precio de mercado puede vender todo su output, y por ello no actuaría racionalmente si lo bajase. Así pues, la curva de demanda del vendedor individual se construye bajo el supuesto que todos los vendedores carguen el mismo precio.

La construcción de curvas de demanda individual para duopolistas y oligopolistas presenta nuevos problemas. Consideremos primeramente el mercado de un producto homogéneo. De la competencia entre los compradores resultará un precio único para todos los vendedores, pero cada comprador es suficientemente importante, en relación a su mercado, para que sus actuaciones repercutan sobre sus rivales. La variación del volumen de su output, por parte de un vendedor, afectará a los precios, de todos y, por consiguiente, son inciertas para cada empresa, las consecuencias del intento de variar los precios. Sus competidores podrán seguirle o no, pero el empresario jamás podrá suponer que no se han apercibido de su maniobra. El resultado de cualquier movimiento por parte de un duopolista u oligopolista depende de las reacciones de sus competidores, y como en general las formas de reacción son inciertas, resulta que para las empresas individuales no se pueden definir las relaciones de precios-ventas.

La capacidad de maniobra de una empresa es mayor si se trata de productos diferenciados. Aunque fije un precio más alto que sus competidores, el vendedor individual no perderá la totalidad de sus ventas. Algunos de sus antiguos clientes se dirigirán a sus rivales; pero otros, los más adictos, continuarán adquiriendo sus productos a un precio más alto, por tener una cierta preferencia por ellos. En el caso de diferenciación del producto no es posible determinar la curva de demanda del mercado, que cubre toda la industria, ya que cada productor lanza un artículo que resulta distinto a los ojos de los consumidores. Cada productor se enfrenta a una curva de demanda distinta, pero la cantidad por él vendida está en función de su precio y del precio de sus competidores. Su actividad está generalmente determinada por las acciones y reacciones de sus competidores.

El monopolista opera desligado de la competencia de rivales cercanos. El productor individual, dentro de un gran grupo vendedor de productos diferenciados, sabe que su actuación tiene una efectividad despreciable sobre la de cada uno de sus competidores, de manera que maximiza su beneficio en forma similar a la del productor individual bajo condiciones de competencia perfecta. En todas las otras formas de la competencia monopolística las actuaciones individuales de los compradores (o vendedores) son interdependientes. Los efectos de las acciones de una empresa tienen repercusión sobre las cantidades, precios y beneficios de los otros. Y como la empresa individual no posee control sobre todas las variables que afectan su beneficio, es imposible maximizarlo incondicionalmente. El empresario, si desea maximizar su beneficio, *debe tener en cuenta en sus decisiones las acciones de sus competidores.* Hay un gran número de formas posibles de reacción que pueden servir de patrón de conducta para explicar las reacciones de los empresarios en mercados duopolistas y oligopolistas; de ahí la existencia de un gran número de teorías sobre el duopolio y el oligopio. Dentro de los límites del presente capítulo, se presentan algunos de estos patrones de reacción. En la Sección 6-1 se expone la teoría tradicional del monopolio, la industria de una sola empresa. En la Sección 6-2 se tratan los problemas de las industrias que comprenden un pequeño número de empresas, los que plantea la diferenciación de productos, y se discuten seis teorías diferentes sobre el duopolio y el oligopolio. En la Sección 6-3 se describe el caso de la competencia monopolística de muchos compradores, y en la Sección 6-4 se esboza la conducta monopsónica.

6-1. Monopolio

En un mercado monopolístico no hay diferencia entre industria y empresa. La empresa monopolística es la industria; no tiene competidores.[1] La curva de demanda individual del monopolista tiene las mismas propiedades generales de la curva de demanda de una industria en un mercado de libre competencia. Es la suma de las curvas de demanda de los consumidores individuales y, por tanto, tiene inclinación negativa. La cantidad vendida es función unívoca del precio

$$q = f(p) \tag{6-1}$$

en la que $dq/dp < 0$. La curva de demanda tiene una función inversa única, y, por consiguiente, el precio puede expresarse como función unívoca de la cantidad:

$$p = F(q) \tag{6-2}$$

donde $dp/dq < 0$. Una diferencia importante entre el productor en competencia perfecta y un monopolista es que el monopolista disminuye el precio a medida que aumenta sus ventas. El productor en competencia perfecta acepta el precio como parámetro y maximiza su beneficio con respecto a las variaciones en su nivel de output; el monopolista, en cambio, puede maximizar su beneficio con respecto a variaciones del output o del precio. No puede, naturalmente, determinarlos independientemente ya que una vez elegido el nivel de output (precio), su precio (nivel de output) queda completamente determinado por su curva de demanda. La combinación precio-cantidad que maximiza el beneficio, es invariable respecto a la elección de la variable independiente. El ingreso monopolístico total (I) es el precio multiplicado por la cantidad vendida

$$I = pq \tag{6-3}$$

Su ingreso marginal (IMa) es la derivada de su ingreso total con respecto a su nivel de output. Diferenciando (6-3) con respecto a q,

$$IMa = \frac{dI}{dq} = p + q\frac{dp}{dq} \tag{6-4}$$

1 En sentido amplio puede afirmarse que todos los productos compiten por las limitadas rentas de los consumidores. El término monopolio define una situación en que la empresa produce un bien que no tiene sustitutivos *próximos*. Los precios de todos los demás bienes se suponen constantes, como ocurre siempre en el análisis de un solo mercado, y la competencia de los otros bienes por la renta del consumidor se refleja en la posición y forma de la curva de demanda del monopolista.

Puesto que $dp/dq < 0$, *IMa* es menor que el precio. El *IMa* del productor en competencia perfecta está también definido por (6-4). Su *IMa* iguala el precio ya que $dp/dq = 0$.El *IMa* monopolístico es igual al precio menos la relación de cambio del precio respecto de la cantidad, multiplicado por la cantidad. En perfecta competencia, si el productor aumenta sus ventas en una unidad, su ingreso total aumentará en la cantidad que pueda obtener por ella en el mercado. En cambio, el monopolista para vender una unidad adicional ha de disminuir el precio de todas.

En la figura 6-1 se representan funciones lineales de demanda y de *IMa*. La demanda decrece monótonamente y la de *IMa* es menor

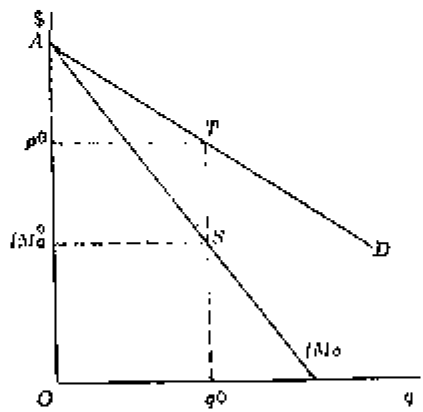


FIGURA 6-1

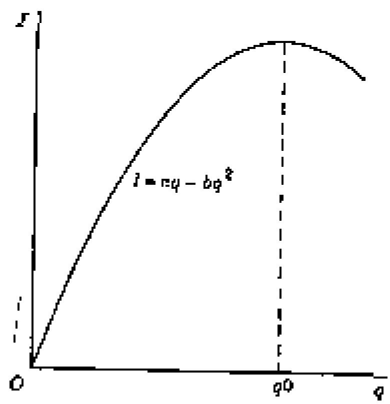


FIGURA 6-2

que el precio para cada output superior a cero. El grado de disminución de la *IMa* es doble que el del precio:

$$p = a - bq \qquad I = aq - bq^2 \qquad IMa = \frac{dI}{dq} = a - 2\,bq$$

Al ser $dp/dq = -b$, una constante, la distancia entre las dos curvas $\left(q\ \dfrac{dp}{dq} = bq\right)$ es función lineal del output. El ingreso total de la combinación precio-cantidad $(p^0,\ q^0)$ es igual al área del rectángulo Op^0Tq^0. El área $OASq^0$, comprendida bajo la curva de *IMa* es también igual al ingreso total:

$$\int_0^q (a - 2\,bq)\,dq = aq - bq^2 = I$$

Lo mismo es aplicable a curvas de demanda que no sean lineales. En general

$$\int_0^q \left(p + q \frac{dp}{dq} \right) dq = pq = I$$

ya que la integral de una constante es siempre cero. El ingreso total viene dado siempre por el área comprendida bajo la curva de *IMa*.

La elasticidad de la demanda (e) en un punto de una curva de demanda, es igual, en valor absoluto, al porcentaje de cambio del output dividido por el porcentaje de cambio del precio:

$$e = - \frac{d\,(\log q)}{d\,(\log p)} = - \frac{p}{q} \frac{dq}{dp} \tag{6-5}$$

El *IMa*, tal como viene dado en (6-4), puede expresarse en términos del precio y de la elasticidad de la demanda:

$$IMa = p\left(1 + \frac{q}{p} \frac{dp}{dq} \right) = p\left(1 - \frac{1}{e} \right) \tag{6-6}$$

El *IMa* es positivo si $e > 1$, es cero si $e = 1$, y negativo si $e < 1$. La diferencia entre *IMa* y precio disminuye al aumentar la elasticidad de la demanda, y el *IMa* se aproxima al precio cuando la elasticidad de la demanda tiende a infinito.

En la figura 6-2 se representa la curva parabólica de ingreso total que corresponde a la curva de demanda lineal de la figura 6-1. La primera derivada del ingreso total (*IMa*) decrece monótonamente y se anula al nivel, q^0, del output. Cuando $q < q^0$ el ingreso total es creciente y $e > 1$, cuando $q = q^0$ el ingreso total alcanza su máximo y $e = 1$, y cuando $q > q^0$ es decreciente y $e < 1$.

El ingreso y el coste total del monopolista pueden expresarse como funciones del output:

$$I = I(q) \qquad C = C(q)$$

Su beneficio es la diferencia entre su ingreso total y el coste total:

$$\pi = I(q) - C(q) \tag{6-7}$$

Para maximizarlo, igualemos a cero las derivadas parciales de (6-7) con respecto a q:

$$\frac{d\pi}{dq} = I'(q) - C'(q) = 0$$

o

$$I'(q) = C'(q) \tag{6-8}$$

Es decir, la maximización del beneficio exige que *IMa* sea igual a *CMa*. El monopolista puede aumentar su beneficio ampliando (o reduciendo) su output, siempre que el aumento de su ingreso (*IMa*) exceda (o sea menor que) el aumento de su coste (*CMa*).

La condición de segundo grado para la maximización del beneficio exige que

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = I''(q) - C''(q) < 0$$

o, añadiendo $C''(q)$ a ambos lados de la desigualdad,

$$I''(q) < C''(q) \tag{6-9}$$

El ritmo de aumento del *IMa* debe ser menor que el del *CMa*. Según se supone generalmente, la condición de segundo grado se satisface *a fortiori* si disminuye *IMa* y aumenta el *CMa*. Si el *CMa* es decreciente, (6-9) exige que el *IMa* disminuya en mayor proporción. Cuando existen varios niveles de output para los que se cumplen las dos condiciones de maximización del beneficio, debe elegirse, por simple inspección, el que dé el beneficio mayor.

En cada uno de los tres casos presentados en la figura 6-3 se satisface la condición de primer grado. La igualación de *IMa* y *CMa* en *a*)

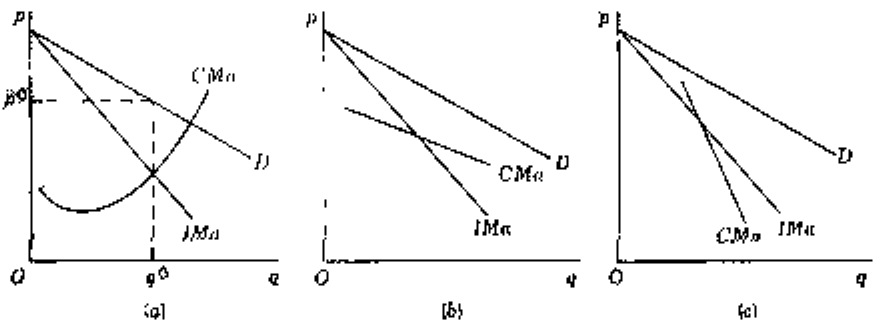


FIGURA 6-3

determina una cantidad q^0 y un precio p^0. El monopolista puede imponer el precio p^0 y admitir que los consumidores adquieran q^0, o puede ofrecer q^0 a la venta y dejar que los consumidores determinen el precio p^0. La condición de segundo grado exige que el valor algebraico de la pendiente de la curva *CMa* exceda al de la de la curva *IMa*, o sea la curva *CMa* debe cortar la curva *IMa* desde abajo. En *a*) y *b*) los puntos de intersección satisfacen esta condición. En *c*) no hay un punto de beneficio máximo, ya que en su único punto de intersección la *CMa* corta la *IMa* desde arriba. Se satisface la condición de primer grado, pero no la de segundo.

Si el monopolista siguiera la conducta del empresario en competencia perfecta, e igualara su *CMa* al precio, produciría un output mayor y cobraría un precio menor. Esto es obvio en la figura 6-3*a*. Las coordenadas del punto de intersección de *CMa* y las curvas de demanda, determinan un precio menor que p^0 y una cantidad mayor que q^0.

Consideremos el monopolista que se enfrenta con una curva de demanda lineal:

$$p = 100 - 4q \qquad I = pq = 100q - 4q^2 \tag{6-10}$$

y produce a un *CMa* constante de 20 dólares. Su coste total es función lineal de su nivel de output:

$$C = 50 + 20q \tag{6-11}$$

Su beneficio es

$$\pi = (100q - 4q^2) - (50 + 20q)$$

Igualando *IMa* y *CMa*

$$100 - 8q = 20$$
$$q = 10 \qquad p = 60 \qquad \pi = 350$$

La condición de segundo grado se satisface: el ritmo de incremento de *CMa* (cero) excede el de *IMa* (—8). Si el monopolista tuviera que seguir las normas de conducta del empresario en competencia perfecta, e igualar el precio al *CMa*:

$$100 - 4q = 20$$
$$q = 20 \qquad p = 20 \qquad \pi = -50$$

vendería una cantidad mayor a un precio inferior y obtendría un beneficio menor. En este ejemplo, los 350 dólares de beneficio del monopolista se transformarían en una pérdida de 50 dólares.

El monopolista discriminador. — El monopolista no tiene, necesariamente, que vender todo su output en un mercado único y a un precio uniforme. En algunas ocasiones, puede vender a diferentes precios en dos o más mercados distintos y aumentar, con ello, su beneficio. La discriminación de precios sólo es factible en el caso de que sea imposible para los compradores el comprar el producto en un mercado y revenderlo en otro. De otra manera, los especuladores comprarían en el mercado de precio bajo y revenderían con beneficio propio en el mercado de precio más alto. Los servicios personales son raramente transferibles, y su venta proporciona, frecuentemente, una oportunidad para la discriminación de precios. La reventa de artículos tales como la electricidad, gas y agua, bienes que precisan para su suministro de conexiones físicas entre productor y consumidor, es enormemente difícil, y por ello, al establecer sus precios, tiene lugar una gran discriminación. A menudo, la discriminación de precios es igualmente posible en mercados separados espacialmente; tal ocurre entre el mercado "doméstico" y "exterior" de un monopolista exportador. Aranceles suficientemente elevados pueden impedir la reventa.

Si un monopolista practica la discriminación de precios en dos mercados distintos, su beneficio es la diferencia entre su ingreso total en ambos mercados y su coste total de producción:

$$\pi = I_1(q_1) + I_2(q_2) - C(q_1 + q_2) \tag{6-12}$$

donde q_1 y q_2 son las cantidades que vende en los dos mercados. $I_1(q_1)$ y $I_2(q_2)$ son sus funciones de ingreso, y $C(q_1 + q_2)$ es su función de coste. Igualando a cero las derivadas parciales de (6-12)

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = I_1'(q_1) - C'(q_1 + q_2) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = I_2'(q_2) - C'(q_1 + q_2) = 0$$

o

$$I_1'(q_1) = I_2'(q_2) = C'(q_1 + q_2) \tag{6-13}$$

El IMa en cada mercado debe igualar al CMa del output total. — Si los *IMa* no fuesen iguales, el monopolista podría aumentar su ingreso total, sin variar el coste total, trasladando ventas del mercado de bajo *IMa* al del alto *IMa*. La igualdad de los *IMa* no implica necesariamente la igualdad de precios en los dos mercados. Designando por p_1, p_2, e_1, y e_2, los precios y las elasticidades de la demanda en los dos mercados, y utilizando (6-6), la igualdad de los *IMa* implica

$$p_1\left(1 - \frac{1}{e_1}\right) = p_2\left(1 - \frac{1}{e_2}\right)$$

y

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 - 1/e_2}{1 - 1/e_1}$$

El precio será menor en el mercado de mayor elasticidad de demanda. Los precios sólo serán iguales si son iguales las elasticidades de demanda.

Las condiciones de segundo grado requieren que los menores principales del Hessiano relevante

$$\begin{vmatrix} I_1'' - C'' & - C'' \\ - C'' & I_2'' - C'' \end{vmatrix}$$

alternen de signo, empezando con signo negativo. Desarrollando los menores principales, se tiene,

$$I_1'' - C'' < 0 \qquad (I_1'' - C'')\,(I_2'' - C'') - (C'')^2 > 0$$

que implican, que $(I_2'' - C'') < 0$. En cada mercado, el *IMa* debe aumentar menos rápidamente que el *CMa* del output total.

Supongamos que el monopolista, cuyas funciones de demanda y coste vienen dadas por (6-10) y (6-11), puede separar a sus consumidores en dos mercados distintos: [2]

$$\begin{gathered} p_1 = 80 - 5\,q_1 \qquad I_1 = 80\,q_1 - 5\,q_1^2 \\ p_2 = 180 - 20\,q_2 \qquad I_2 = 180\,q_2 - 20\,q_2^2 \\ C = 50 + 20\,(q_1 + q_2) \end{gathered}$$

Haciendo el *IMa* de cada mercado igual al *CMa* del output total:

$$80 - 10\,q_1 = 20 \qquad 180 - 40\,q_2 = 20$$

Hallando los valores de q_1 y q_2 y sustituyéndolos en las ecuaciones de demanda, beneficio y elasticidad, se obtiene

$$\begin{gathered} q_1 = 6 \qquad p_1 = 50 \qquad e_1 = 1{,}67 \\ q_2 = 4 \qquad p_2 = 100 \qquad e_2 = 1{,}25 \\ \pi = 450 \end{gathered}$$

Los valores para los que se cumplen las condiciones de segundo grado son

$$-10 < 0; \quad \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -40 \end{vmatrix} = 400 > 0$$

2. Su curva de demanda agregada permanece inalterada. Hallando los valores de q_1 y q_2 en las ecuaciones de demanda,

$$q_1 = 16 - 0{,}2p_1 \qquad q_2 = 9 - 0{,}05p_2$$

A cualquier precio, la demanda total (q) es la suma de las demandas de los dos mercados:

$$q = q_1 + q_2 = 16 - 0{,}2p + 9 - 0{,}05p = 25 - 0{,}25p$$

Hallando el valor de p,

$$p = 100 - 4q$$

que es la función de demanda (6-10).

Con la discriminación, el monopolista ha aumentado su beneficio de 350 a 450 dólares. El precio es más bajo en el mercado con mayor elasticidad de demanda. El monopolista podría aumentar su beneficio a través de ulteriores discriminaciones si pudiese subdividir a sus consumidores en un mayor número de grupos de diferentes elasticidades de demanda.

El monopolista de múltiples factorías. — Considérese el caso del monopolista que vende en un solo mercado y que produce su output en dos fábricas separadas. Su beneficio será la diferencia entre su ingreso total y el coste de producción total de ambas instalaciones industriales:

$$\pi = I(q_1 + q_2) - C_1(q_1) - C_2(q_2) \tag{6-14}$$

donde q_1 y q_2 son las cantidades que produce en las dos fábricas, $I(q_1 + q_2)$ es su función de ingresos, y $C_1(q_1)$ y $C_2(q_2)$ son sus funciones de costes. Igualando a cero las derivadas parciales de (6-14),

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = I'(q_1 + q_2) - C_1'(q_1) = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = I'(q_1 + q_2) - C_2'(q_2) = 0$$

o

$$I'(q_1 + q_2) = C_1'(q_1) = C_2'(q_2) \tag{6-15}$$

El *CMa* de cada fábrica debe ser igual al *IMa* del output en ambas. Las condiciones de segundo grado, exigen que los menores principales del Hessiano relevante

$$\begin{vmatrix} I'' - C_1'' & I'' \\ I'' & I'' - C_2'' \end{vmatrix} \tag{6-16}$$

alternen de signo, empezando con el negativo. El lector puede darse cuenta que (6-16) exige que el *CMa* de cada fábrica crezca más rápidamente que el *IMa* del output de las dos.

La imposición y la producción monopolística. — Una cuota fija o un impuesto sobre los beneficios (de tipo marginal inferior al 100 por ciento) reducirá el beneficio del monopolista, pero no afectará su combinación precio-cantidad óptima. Un impuesto sobre las ventas, tanto si se basa en la cantidad vendida como en su valor, reducirá su beneficio y nivel de output y aumentará el precio.

El monopolista no puede eludir un impuesto de cuota fija. Debe pa-

...arlo prescindiendo de la magnitud física o del valor de sus ventas, o de la cuantía de su beneficio. Su beneficio se convierte en

$$\pi = I(q) - C(q) - T \tag{6-17}$$

en la que T es el importe de la cuota y π es el beneficio después de realizada la liquidación. Igualando a cero la derivada de (6-17),

$$\frac{d\pi}{dq} = I'(q) - C'(q) = 0 \qquad I'(q) = C'(q)$$

Puesto que T es una constante, desaparece diferenciando, y los niveles del output y precio monopolísticos se determinan por la igualdad de IMa y CMa, como en el caso de que no hubiese impuesto.[3]

El impuesto sobre el beneficio exige que el monopolista pague al gobierno una proporción determinada de la diferencia entre su ingreso y coste totales. Si el impuesto es en todos los casos el mismo (constantemente proporcional), su beneficio, después del pago del impuesto, es

$$\pi = I(q) - C(q) - t[I(q) - C(q)] = (1 - t)[I(q) - C(q)] \tag{6-18}$$

donde $0 < t < 1$. Igualando a cero la derivada de (6-18),

$$\frac{d\pi}{dq} = (1 - t)[I'(q) - C'(q)] = 0$$

Puesto que $(1 - t) \neq 0$,

$$I'(q) - C'(q) = 0 \qquad I'(q) = C'(q)$$

Al ser la condición de primer grado la misma que en (6-8), los niveles de output y precio permanecen inalterables. El único medio que tiene el monopolista de eludir un impuesto sobre el beneficio es reducirlo antes de la imposición. Si le es posible retirar una parte del incremento en beneficios antes de la imposición, la maximización del beneficio posterior al impuesto la obtendrá igualando IMa y CMa.

Si se impone un determinado impuesto sobre las ventas, de α dólares por unidad de output,

$$\pi = I(q) - C(q) - \alpha q \tag{6-19}$$

y

$$\frac{d\pi}{dq} = I'(q) - C'(q) - \alpha = 0 \qquad I'(q) = C'(q) + \alpha \tag{6-20}$$

El monopolista maximiza su beneficio posterior al pago del impuesto

1 A menos que se indique lo contrario, de ahora en adelante se supondrá que las condiciones de segundo grado se satisfacen siempre.

igualando *IMa* al *CMa* más el impuesto unitario. Tomando la diferencial total de (6-20),

$$I''(q)\, dq = C''(q)\, dq + da$$

y
$$\frac{dq}{da} = \frac{1}{I''(q) - C''(q)} \qquad (6\text{-}21)$$

Puesto que por el supuesto de que se cumple la condición de segundo grado $I''(q) - C''(q) < 0$, $dq/da < 0$, y el nivel óptimo de output disminuye al aumentar el tipo impositivo. La imposición de un determinado impuesto sobre las ventas, reduce la cantidad vendida y aumenta el precio.

Volvamos al ejemplo dado por (6-10) y (6-11) y supongamos que el gobierno establece un impuesto, de 8 dólares por unidad, sobre el output del monopolista:

$$\pi = (100\,q - 4\,q^2) - (50 + 20\,q) - 8\,q$$

$$\frac{d\pi}{dq} = 72 - 8\,q = 0 \qquad q = 9 \qquad p = 64 \qquad \pi = 274$$

Como resultado del impuesto, las ventas disminuyen en una unidad, el precio aumenta en 4 dólares, y el beneficio del monopolista disminuye en 76 dólares. El aumento del precio es menor que el impuesto unitario, y el beneficio del monopolista disminuye en más que la suma detraída por el impuesto, 72 dólares. Si el gobierno estableciera sobre el monopolista un impuesto global de 72 dólares, el erario obtendría el mismo ingreso, el beneficio del monopolista disminuiría en 4 dólares, y los consumidores no tendrían que pagar un precio más alto que el producto. En consecuencia, a menudo se aduce que es preferible un impuesto sobre el precio global a uno sobre las ventas.

El resultado es similar si el impuesto sobre las ventas es proporcional a su valor (al ingreso total)

$$\pi = I(q) - C(q) - sI(q) = (1 - s)\, I(q) - C(q)$$

$$\frac{d\pi}{dq} = (1 - s)\, I'(q) - C'(q) = 0 \qquad (1 - s)\, I'(q) = C'(q) \qquad (6\text{-}22)$$

donde $0 < s < 1$. El beneficio se maximiza igualando el *CMa* a la porción de *IMa* que se permite retener al monopolista. Tomando la diferencial total de (6-22)

$$(1 - s)\, I''(q)\, dq - I'(q)\, ds = C''(q)\, dq$$

y
$$\frac{dq}{ds} = \frac{I'(q)}{(1 - s)\, I''(q) - C''(q)} \qquad (6\text{-}23)$$

Ahora bien, como la condición de primer grado exige que el *IMa* sea positivo, y la de segundo grado que el denominador de (6-23) sea negativo, $dq/ds < 0$. La imposición de un impuesto *ad valorem* sobre las ventas redunda también en una reducción del nivel del output y en un aumento del precio.

6-2. Duopolio y oligopolio

Una industria duopolista contiene dos vendedores. Una oligopolística contiene un número de ellos lo suficientemente pequeño para que cualquier acción de un vendedor individual influya perceptiblemente en sus rivales. El número de vendedores no es una base suficiente para distinguir el oligopolio de la competencia perfecta en el caso de un producto homogéneo, o del monopolio con muchos vendedores en el caso de un producto diferenciado. El rasgo distintivo esencial es la interdependencia entre las acciones de los diversos vendedores. Si la decisión sobre la cantidad a producir, por parte de un vendedor, tiene una influencia, $\partial\pi_i/\partial q_j$, imperceptible sobre el beneficio de otra, la industria satisface el requisito básico tanto de la competencia perfecta como de la competencia monopolística con pluralidad de vendedores. Si $\partial\pi_i/\partial q_j$ es de magnitud perceptible, la industria es duopolista u oligopolística.[4]

La combinación precio-cantidad y el beneficio de un duopolista u oligopolista, dependen de las acciones de todos los miembros de su mercado. Si su producto es diferenciado, puede controlar su propio nivel de output (o precio), pero no tiene un control directo sobre las otras variables que afectan su beneficio. El beneficio de cada vendedor es el resultado de la acción recíproca de todos los miembros del mercado.

[4] En todo el presente capítulo se supone la simetría del mercado, en el sentido de que se supone que las derivadas parciales $\partial\pi_i/\partial q_j$ son del mismo grado de magnitud para todas las i y j excepto $i = j$. Modificando y combinando los análisis de mercados simétricos se pueden analizar muchas situaciones de mercados asimétricos. Consideremos el caso del monopolio parcial, o sea, un mercado conteniendo un gran vendedor y gran número de pequeños vendedores. Para $(i = 1, \ldots, n)$, $(j = 2, \ldots, n)$, e $i \neq j$, las derivadas parciales $\partial\pi_i/\partial q_j$ son de magnitud despreciable, y son de magnitud notable para todas las i donde el subíndice 1 denota al vendedor importante.

Combinando las teorías del monopolio puro y de la competencia perfecta se puede formular una teoría del monopolio parcial. Las empresas pequeñas aceptarían el precio vigente y ajustarán sus niveles de "output" para maximizar su beneficio como bajo el régimen de la competencia perfecta. La función de demanda efectiva del monopolista parcial se obtiene restando la oferta de las empresas pequeñas, que es función del precio, de la curva de demanda de mercado, también función del precio. Usando la función de demanda, el monopolista parcial maximiza su beneficio eligiendo un nivel de "output" o un precio, de la misma forma que el monopolista puro.

Para el caso de oligopolistas y duopolistas no existen supuestos de conducta generalmente aceptados como ocurría con el monopolista y con los productores en competencia perfecta. Los mercados duopolistas y oligopolistas tienen multitud de soluciones distintas, cada una de las que se basa en una serie distinta de supuestos de conducta. En la sección presente se describen seis de las soluciones más interesantes. Todas se desarrollan para un mercado duopolista, pero pueden generalizarse con facilidad, excepto la de Stackelberg y la de la teoría de los juegos, o mercados oligopólicos. Las soluciones de Cournot, la de colusión y la de Stackelberg se formulan para mercados con productos homogéneos, pero pueden generalizarse fácilmente a mercados de productos diferenciados. La solución de participaciones del mercado y la de la curva de demanda apuntada, se desarrollan para productos diferenciados pero pueden modificarse para que abarquen los homogéneos. La solución de la teoría de los juegos se formula para ambos tipos de mercado.

La solución de Cournot. — La solución clásica del problema del duopolio (y del oligopolio) está asociada al nombre de un economista francés de principios del siglo XIX, Agustín Cournot. El modelo supone que hay dos empresas que producen un producto homogéneo. La función inversa de la demanda expresa el precio en función de la cantidad vendida total:

$$p = F(q_1 + q_2) \tag{6-24}$$

donde q_1 y q_2 son los niveles de output de los duopolistas. El ingreso total de cada duopolista depende del nivel de su propio output y del de su rival:

$$\begin{aligned} I_1 &= q_1 F(q_1 + q_2) = I_1(q_1, q_2) \\ I_2 &= q_2 F(q_1 + q_2) = I_2(q_1, q_2) \end{aligned} \tag{6-25}$$

El beneficio de cada uno es igual a su ingreso total menos su coste, que depende solamente de su nivel de output:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= I_1(q_1, q_2) - C_1(q_1) \\ \pi_2 &= I_2(q_1, q_2) - C_2(q_2) \end{aligned} \tag{6-26}$$

El supuesto de conducta básico, en la solución de Cournot, es que cada duopolista maximiza su beneficio en el supuesto de que la cantidad producida por su rival es invariante con respecto a la cantidad que él decida producir. El primer duopolista (I para abreviar) maximiza π_1 con respecto de q_1, considerando a q_2 como parámetro, y el segundo (II para abreviar) maximiza π_2 con respecto a q_2 considerando a q_1 como parámetro.

Igualando a cero las derivadas parciales apropiadas de (6-26),

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \frac{\partial I_1}{\partial q_1} - \frac{dC_1}{dq_1} = 0 \qquad \frac{\partial I_1}{\partial q_1} = \frac{dC_1}{dq_1}$$
$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \frac{\partial I_2}{\partial q_2} - \frac{dC_2}{dq_2} = 0 \qquad \frac{\partial I_2}{\partial q_2} = \frac{dC_2}{dq_2} \tag{6-27}$$

Las condiciones de primer grado exigen que cada duopolista iguale su *CMa* a su *IMa*. Los *IMa* de los duopolistas no son necesariamente iguales. Sean $q = q_1 + q_2$ y $\partial q/\partial q_1 = \partial q/\partial q_2 = 1$. Los *IMa* de los duopolistas son:

$$\frac{\partial I_i}{\partial q} = p + q_i \frac{dp}{dq} \qquad (i = 1, 2)$$

El duopolista con mayor output tendrá el menor *IMa*. Cualquier aumento del output realizado por alguno de los dupolistas aisladamente redundará en una reducción del precio, o sea un movimiento descendente a lo largo de la curva de demanda del mercado afectará los ingresos totales de ambos. Los tipos de variación de los ingresos totales, dependen de los niveles de output. Imaginemos que el precio disminuye en la relación de 1 dólar por unidad de aumento del volumen de ventas, y que $q_1 = 100$ y $q_2 = 200$. Si I aumenta su output a 101 unidades, recibirá 100 dólares menos por las 100 unidades que había vendido previamente a un precio más alto. Si no se altera el output de II, éste perderá 200 dólares de ingreso como resultado de la acción de I, pero esto, dentro del marco de los supuestos de Cournot, no atañe a I. Si II aumenta su output en 1 unidad, permaneciendo igual el nivel de output de 1, recibirá 200 dólares menos por las unidades que vendió previamente.

La condición de segundo grado de cada duopolista requiere que

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} = \frac{\partial^2 I_1}{\partial q_i^2} - \frac{d^2 C_i}{dq_i^2} < 0 \qquad (i = 1, 2)$$

o

$$\frac{\partial^2 I_i}{\partial q_i^2} < \frac{d^2 C_i}{dq_i^2} \qquad (i = 1, 2) \tag{6-28}$$

El *IMa* de cada duopolista debe aumentar menos rápidamente que su *CMa*. El proceso de maximización de la solución de Cournot no es el mismo que en el caso de un monopolista con dos fábricas, en el que un solo individuo controla los valores de ambos niveles de output. Aquí, cada duopolista maximiza su beneficio respecto a la única variable bajo su control.

El mercado duopólico está en equilibrio si los valores de q_1 y q_2 son tales que, dado el output del otro, cada duopolista maximiza su beneficio y ninguno desea alterar su output. Si se satisface (6-28), puede hallarse la solución de equilibrio averiguando los valores de q_1 y q_2 en (6-27). El proceso del mercado se describe en forma más completa si se introduce un paso previo a la determinación de los valores de equilibrio de los niveles de output. Hallando el valor de q_1 en la primera ecuación de (6-27) y el de q_2 en la segunda, se determinan las funciones de reacción, que expresan el output de cada duopolista en función del de su rival:

$$\begin{aligned} q_1 &= \Psi_1(q_2) \\ q_2 &= \Psi_2(q_1) \end{aligned} \tag{6-29}$$

La función de reacción de I expresa una relación entre q_1 y q_2 que tiene la propiedad de que para cada valor concreto de q_2, el correspondiente de q_1 maximiza π_1. La función de reacción de II da el valor de q_2 que maximiza π_2 para cualquier valor concreto de q_1. Un par de valores de q_1 y q_2 que satisfaga ambas funciones de reacción, es una solución de equilibrio.

Si las funciones de la demanda y coste son

$$p = 100 - 0{,}5\,(q_1 + q_2) \qquad C_1 = 5\,q_1 \qquad C_2 = 0{,}5\,q_2^2 \tag{6-30}$$

los beneficios de los duopolistas son

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 100\,q_1 - 0{,}5\,q_1^2 - 0{,}5\,q_1\,q_2 - 5\,q_1 \\ \pi_2 &= 100\,q_2 - 0{,}5\,q_2^2 - 0{,}5\,q_1\,q_2 - 0{,}5\,q_2^2 \end{aligned} \tag{6-31}$$

Igualando a cero las derivadas parciales apropiadas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} &= 95 - q_1 - 0\,5\,q_2 = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} &= 100 - 0{,}5\,q_1 - 2q_2 = 0 \end{aligned}$$

Las correspondientes funciones de reacción son

$$q_1 = 95 - 0{,}5\,q_2 \qquad q_2 = 50 - 0{,}25\,q_1 \tag{6-32}$$

Un aumento de nivel de output de cualquier duopolista causará una disminución del output óptimo del otro. Las funciones de reacción tienen la forma representada en la figura 6-4. La solución de equilibrio viene dada por su punto de intersección. Hallando los valores de q_1 y q_2 en (6-32) y sustituyendo en las funciones de demanda y beneficio,

$$\begin{array}{lll} q_1 = 80 & q_2 = 30 & p = 45 \\ \pi_1 = 3.200 & \pi_2 = 900 & \end{array} \tag{6-33}$$

Esta solución satisface las condiciones de segundo grado:

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial q_1^2} = -1 < 0 \qquad \frac{\partial^2 \pi_2}{\partial q_2^2} = -2 < 0$$

El supuesto de conducta básico de la solución de Cournot es bastante débil. Cada duopolista actúa como si fuera fijo el output de su rival. Sin embargo, no es así. El equilibrio se alcanza a través de una secuencia de ajustes instantáneos. Uno de los duopolistas fija un output; esto obliga al otro a ajustar el suyo, lo que, a su vez, obliga al primero a reajustar el suyo, y así sucesivamente. Es improbable que cada uno

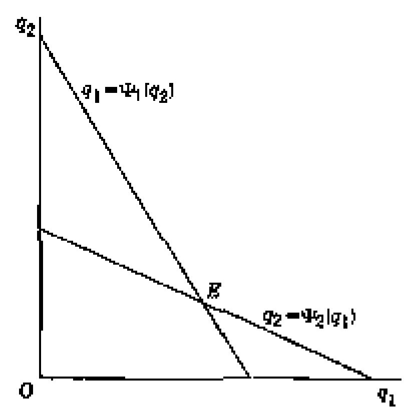


Figura 6-4

suponga que sus decisiones sobre la cantidad no afectan las de su rival, si cada uno de sus ajustes va inmediatamente seguido de una reacción por parte de su rival. Otros autores han supuesto que cada duopolista maximiza su beneficio en el supuesto de quo el precio de su rival permanece inalterado, pero si el producto es homogéneo, éste es un supuesto aún más irrealista.

Generalmente, duopolistas y oligopolistas reconocen la interdependencia mutua entre las acciones propias y las de sus rivales.

La solución de Cournot se generaliza fácilmente a mercados que contienen más de dos vendedores. A medida que aumenta el número de vendedores, el output de cada uno representa una menor parte del total de la industria, y los efectos de la actuación de un vendedor individual sobre sus rivales son cada vez menos perceptibles. En el límite, la solución de Cournot se aproxima al resultado de la competencia perfecta. Un solo vendedor será incapaz de influir sobre el precio, su *IMa* se igualará al precio del mercado, y sus acciones no provocarán reacciones por parte de sus rivales.

SOLUCIÓN DE COLUSIÓN. — El supuesto de conducta del modelo es que los duopolistas (u oligopolistas) pueden reconocer su interdependencia mutua y acordar entonces el actuar al unísono a fin de maximizar el beneficio total de la industria. Ambas variables se hallan así bajo un solo control, y la industria es de hecho un monopolio. La maximización se desarrolla siguiendo el mismo proceso que en el caso del monopolista de dos explotaciones industriales.

Volviendo al ejemplo dado por (6-30), el beneficio de la industria es

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = 100\,(q_1 + q_2) - 0{,}5\,(q_1 + q_2)^2 - 5\,q_1 - 0{,}5\,q_2^2$$

Igualando a cero las derivadas parciales de π:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 95 - q_1 - q_2 = 0 \qquad \frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 100 - q_1 - 2\,q_2 = 0$$

Despejando q_1 y q_2 y sustituyendo en las ecuaciones de beneficio y demanda,

$$q_1 = 90 \qquad q_2 = 5 \qquad \pi = 4.525 \qquad p = 52{,}5$$

Comparándolo con (6-33) observamos que los duopolistas en colusión producen un output total menor, a un precio más alto y con un beneficio total mayor, que en el caso de Cournot. Desde el punto de vista de la industria en su conjunto, es ventajoso para la empresa con *CMa* menos crecientes (la I en este ejemplo) aumentar su participación relativa en el output total. En la solución de colusión, el *CMa* de equilibrio es el mismo en las dos empresas.

El beneficio de la industria aumenta de 4100 a 4525 dólares. El beneficio de I se ha incrementado de 3200 a 4275 dólares y el de II se ha reducido de 900 a 250 dólares. El aumento de I es mayor que la reducción de II y la colusión es rentable para ambos si I compensa a II mediante un pago que sea mayor que la reducción de II (650 dólares) pero menor que el aumento de I (1075 dólares).

La solución de Stackelberg. — Generalmente, el beneficio de cada duopolista es función de los niveles de output de ambos:

$$\pi_1 = h_1(q_1, q_2) \qquad \pi_2 = h_2(q_1, q_2) \tag{6-34}$$

La solución de Cournot se obtiene maximizando π_1 con respecto a q_1 y π_2 con respecto a q_2. La solución de colusión se obtiene maximizando $(\pi_1 + \pi_2)$ con respecto a q_1 y q_2 a la vez. Para los duopolistas, cuyas funciones de beneficio vienen dadas por (6-34), caben otras muchas formas de conducta. Una de las más interesantes resulta del análisis de la conducta de líderes y de seguidores, formulado por el economista alemán Heinrich von Stackelberg.

El seguidor estudia su función de reacción (6-29) y ajusta su nivel de output de modo que, dada la cantidad decidida por su rival, al que supone un líder, maximice su beneficio. El líder no estudia su función de reacción. Da por sentado que su rival actúa como seguidor y maximiza su beneficio, dada la función de reacción de su rival. Si I desea actuar como líder, supone válida la función de reacción de II y sustituye esta relación en su función de beneficio:

$$\pi_1 = h_1[q_1, \Psi(q_1)]$$

El beneficio de I es ahora función de q_1 solamente, y puede maximizarse con respecto a esta única variable. Como líder, II puede también determinar su beneficio máximo suponiendo que I estudia su función de reacción y actúa como seguidor. Sustituyendo el nivel óptimo de output de II, como líder, en la función de reacción de I, se determina el beneficio máximo de I, como seguidor, y sustituyendo el nivel óptimo de output de I, como líder, en la función de reacción de II, se determina el beneficio máximo de II, como seguidor.

Cada duopolista determina sus niveles de beneficio máximo, tanto como líder que como seguidor y desea desempeñar el papel que dé el máximo más elevado. Existen cuatro posibilidades: 1.ª I quiere ser líder y II seguidor; 2.ª II quiere ser líder y I seguidor; 3.ª ambos quieren ser líderes, 4.ª ambos quieren ser seguidores. La primera posibilidad da lugar a modelos de conducta consistentes y, por tanto, a un equilibrio determinado [8]. I supone que II actuará como seguidor, y así ocurre; II supone que I actuará como líder y así sucede. La segunda posibilidad da lugar, asimismo, a un equilibrio determinado. Si ambos quieren ser seguidores, sus expectativas no se cumplen ya que cada uno supone

[8] Se supone que las condiciones de primero y segundo grado para los máximos se cumplen en todo caso.

que el otro actuará como líder. Los duopolistas deben corregir sus expectativas. En los supuestos de Stackelberg, se alcanza la solución de Cournot si cada uno desea actuar cómo un seguidor, sabiendo que el otro actuará también como seguidor. De otro modo, antes de alcanzar el equilibrio, uno de los dos tendría que modificar su modelo de conducta y actuar como líder.

Si ambos quieren ser líderes, los dos suponen que la conducta del otro está gobernada por su función de reacción, pero, de hecho, no se observará ninguna de las dos funciones, y se tropezará con un desequilibrio de Stackelberg. Stackelberg creía que este era el resultado más frecuente. *A priori* no puede predecirse el resultado final de un desequilibrio de Stackelberg. Si Stackelberg estaba en lo cierto, la situación desembocará en una lucha económica y hasta que uno haya sucumbido al liderato del otro o se llegue a un acuerdo de colusión no se alcanzará el equilibrio.

Volvamos otra vez al ejemplo dado por (6-30). El beneficio máximo de I, como líder, se obtiene sustituyendo la función de reacción de II (6-32) en la ecuación de beneficio de I (6-31):

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 100\,q_1 - 0{,}5\,q_1^2 - 0{,}5\,q_1\,(50 - 0{,}25\,q_1) - 5\,q_1 \\ &= 70\,q_1 - 0{,}375\,q_1^2 \end{aligned}$$

Maximizando con respecto a q_1,

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = 70 - 0{,}75\,q_1 = 0 \qquad q_1 = 93\,^1/_3 \qquad \pi_1 = 3.266\,^2/_3$$

Del mismo modo, para II

$$\begin{aligned} \pi_2 &= 100\,q_2 - 0{,}5\,q_2^2 - 0{,}5\,q_2\,(95 - 0{,}5\,q_2) - 0{,}5\,q_2^2 \\ &= 52{,}5\,q_2 - 0{,}75\,q_2^2 \end{aligned}$$

$$\frac{d\pi_2}{dq_2} = 52{,}5 - 1{,}5\,q_2 = 0 \qquad q_2 = 35 \qquad \pi_2 = 918{,}75$$

Para determinar el beneficio máximo de I como líder, hay que determinar previamente su output sustituyendo el output de II como líder (35 unidades) en su función de reacción (6-32) y luego calcular su beneficio en la primera ecuación de (6-31):

$$q_1 = 95 - 0{,}5\,q_2 = 77{,}5 \qquad \pi_1 = 3.003{,}125$$

Paralelamente, sustituyendo 93 $^1/_3$ en la función de reacción de II y calculando su beneficio en la segunda ecuación de (6-31):

$$q_2 = 50 - 0{,}25\,q_1 = 26\,^2/_3 \qquad \pi_2 = 155\,^5/_9$$

Cada duopolista recibe un beneficio mayor como líder y ambos desean actuar como tales. Como resultado de una alteración de los supuestos de conducta básicos un ejemplo en el que se determinaba fácilmente la solución de equilibrio de Cournot se ha convertido en un equilibrio de Stackelberg.

Diferenciación del producto. — En un mercado oligopolista, el productor de un producto diferenciado se enfrenta con su propia curva de demanda. La cantidad que puede vender depende de las decisiones respecto a los precios de todos los miembros de la industria:

$$q_i = f_i\ (p_1, p_2, \ldots, p_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{6-35}$$

Donde $\partial q_i/\partial p_i < 0$ y $\partial q_i/\partial p_j > 0$ para todos $i \neq j$. Un aumento de precio por parte del vendedor i^o, permaneciendo inalterables los demás precios, provoca una reducción de su nivel de output. Algunos de sus clientes se dirigirán a sus competidores. Si algún otro vendedor aumentara sus precios, el vendedor i^o podría vender una cantidad mayor a un precio fijo. Algunos de los clientes de sus competidores se dirigirían hacia él.

Los productores individuales pueden fijar el precio o la cantidad. De forma inversa, las funciones de la demanda se pueden expresar en función de los niveles de output como variables independientes: [6]

$$p_i = F_i\ (q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{6-36}$$

Todas las derivadas parciales de (6-36) son negativas. Permaneciendo constantes los demás niveles de output, si el vendedor i^o aumenta su nivel de output, p_i disminuirá puesto que una cantidad mayor siempre trae consigo un precio más bajo. Si algún otro vendedor aumenta su nivel de output, su precio bajará, y el precio de la empresa i^a debe disminuir también a fin de mantener q_i a un nivel constante. De otro modo, algunos de sus clientes se dirigirán a la empresa que ha rebajado los precios.

Las soluciones de Cournot, las de colusión y de Stackelberg pueden modificarse fácilmente para el caso de la diferenciación del producto reemplazando $p = F\ (q_1 + q_2)$ por funciones de demanda individuales:

$$p_1 = F_1\ (q_1, q_2) \qquad p_2 = F_2\ (q_1, q_2)$$

6. Las funciones de demanda pueden construirse para describir situaciones en las que, para algunos vendedores, la variable independiente es el precio, y para otros la cantidad. Entonces, la variable independiente de cada vendedor se expresa en función de las variables independientes de todos.

El análisis puede igualmente extenderse a los casos en los que los precios son las variables independientes:

$$q_1 = f_1 (p_1, p_2) \qquad q_2 = f_2 (p_1, p_2)$$

Los beneficios se han expresado en función de las cantidades:

$$\pi_1 = h_1 (q_1, q_2) \qquad \pi_2 = h_2 (q_1, q_2)$$

Sustituyendo:

$$\pi_1 = h_1 [f_1 (p_1, p_2), f_2 (p_1, p_2)] = H_1 (p_1, p_2)$$
$$\pi_2 = h_2 [f_1 (p_1, p_2), f_2 (p_1, p_2)] = H_2 (p_1, p_2)$$

El beneficio de cada duopolista es función de ambos precios, y el proceso de maximización puede verificarse respecto a los precios.

En el caso de productos diferenciados, los beneficios de los duopolistas pueden depender de la cantidad de gastos de publicidad. Si ésta es eficaz permite a la empresa vender una cantidad mayor a un precio dado o una cantidad dada a un precio mayor. Las curvas de demanda son:

$$p_1 = F_1 (q_1, q_2, A_1, A_2) \qquad p_2 = F_2 (q_1, q_2, A_1, A_2)$$

donde A_1 y A_2 son las cantidades de gastos de publicidad de I y II respectivamente. Las funciones del beneficio se convierten en

$$\pi_1 = q_1 F_1 (q_1, q_2, A_1, A_2) - C_1 (q_1) - A_1$$
$$\pi_2 = q_2 F_2 (q_1, q_2,) A_1, A_2) - C_2 (q_2) - A_2$$

En estas condiciones, cada duopolista debe maximizar su beneficio tanto respecto a su gasto de publicidad como a su nivel de output.

La solución de participaciones del mercado. — Supongamos que II, independientemente de los efectos de su actuación sobre sus beneficios a corto plazo, quiere mantener una participación fija en las ventas totales de un producto diferenciado. Su interés principal se concentra sobre las ventajas a largo plazo que se derivan de mantener una participación dada del mercado. Un cambio de cantidad por parte de I será seguido inmediatamente por un cambio proporcional por parte de II. La relación

$$\frac{q_2}{q_1 + q_2} = k \qquad q_2 = \frac{kq_1}{1 - k} \tag{6-37}$$

en la que k es la participación de mercado deseado por II, y se satisface siempre. I es líder del mercado en el sentido de que sus acciones serán siempre seguidas por II de un modo predeterminado.

La función de demanda de I es $p_1 = F_1(q_1, q_2)$, y su función de beneficio es:

$$\pi_1 = q_1 F_1 (q_1, q_2) - C_1 (q_1)$$

Sustituyendo el valor de q_2 en (6-37),

$$\pi_1 = q_1 F_1 \left(q_1, \frac{kq_1}{1-k} \right) - C_1 (q_1)$$

El beneficio de I es función solamente de q_1 y puede maximizarse con respecto a esta sola variable, siempre que II reaccione en forma congruente a mantener su participación en el mercado.

Sean las funciones de demanda y coste de I

$$p_1 = 100 - 2 q_1 - q_2 \qquad C_1 = 2{,}5 q_1^2 \tag{6-38}$$

y que $k = 1/3$, y por tanto $q_2 = 0{,}5\, q_1$. El beneficio de I será

$$\pi_1 = q_1 (100 - 2 q_1 - 0{,}5 q_1) - 2{,}5 q_1^2 = 100 q_1 - 5 q_1^2 \tag{6-39}$$

Igualando a cero la primera derivada de (6-39), despejando q_1 y sustituyendo en las relaciones anteriores,

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = 100 - 10 q_1 = 0$$

$$q_1 = 10 \qquad q_2 = 5 \qquad p_1 = 75 \qquad \pi_1 = 500 \tag{6-40}$$

I maximiza su beneficio para un output de 10 unidades, y II reacciona produciendo 5 unidades.

La solución de la curva de demanda apuntada. — Los mercados duopolistas y oligopolistas se caracterizan por alteraciones de precios poco frecuentes. Normalmente, las empresas no cambian sus combinaciones precio-cantidad a consecuencia de pequeños cambios en sus curvas de costes como sugeriría el precedente análisis del mercado. La solución de la curva de demanda apuntada muestra un análisis teórico compatible con esta conducta observada. Partiendo de combinaciones precio-cantidad predeterminadas, se supone que si uno de los duopolistas disminuye su precio (aumenta su cantidad), el otro a fin de mantener su participación en el mercado reaccionará disminuyendo también su precio (aumentando su cantidad). Se supone que si uno de los duopolistas aumenta su precio, su rival mantendrá el suyo inalterado y aumentará por tanto su participación en el mercado. Es decir, la conducta es seguir las disminuciones de precios pero no los aumentos.

Supongamos que las funciones de demanda y coste de los duopolistas son

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 100 - 2q_1 - q_2 \qquad & C_1 &= 2{,}5\,q_1^2 \\
p_2 &= 95 - q_1 - 3q_2 \qquad & C_2 &= 25\,q_2
\end{aligned}
\tag{6-41}
$$

y que los precios y cantidades normalmente establecidos son $p_1 = 70$, $q_1 = 10$, $p_2 = 55$, y $q_2 = 10$.[7] Si I aumentara su precio, II dejaría el suyo inalterado, en 55 dólares. Sustituyendo $p_2 = 55$ en la función de demanda de II (6-41) y hallando el valor de q_2,

$$q_2 = \frac{40 - q_1}{3} \tag{6-42}$$

Mientras I aumente su precio, y disminuya por lo tanto su nivel de output, II aumentará el suyo y su participación en el mercado. Sustituyendo el valor de q_2 dado por (6-42) en la función de la demanda de I (6-41)

$$p_1 = \frac{260 - 5q_1}{3} \tag{6-43}$$

En el supuesto de que II mantenga su precio en 55 dólares, el precio de I es función solamente de q_1. Partiendo de la situación inicial, (6-43) es válida solamente para $p_1 > 70$ y $q_1 < 10$. Formando la función de ingreso total de I a partir de (6-43), se puede derivar su función de *IMa* de I para aumentos del precio

$$I_1 = q_1\left(\frac{260 - 5q_1}{3}\right)$$

y

$$\frac{dI_1}{dq_1} = \frac{260 - 10q_1}{3} \tag{6-44}$$

Para $q_1 = 10$, el *IMa* de I para un aumento del precio es de $53^1/_3$ dólares.

Si I reduce su precio, las funciones de demanda y de *IMa* dadas por (6-43) y (6-44) no son válidas. En este caso, II le seguirá disminuyendo también su precio en la cantidad necesaria para que permita mantener la mitad del volumen total de ventas. Para mantener su participación en el mercado, II debe aumentar su nivel de output en la misma canti-

7. El lector puede darse cuenta de que estas combinaciones precio-cantidad representan una solución de Cournot. Cada duopolista iguala el *CMa* e *IMa*, en el supuesto de que el nivel de output de su rival permanezca inalterado. En el análisis de la curva de demanda apuntada no tiene ninguna relevancia el método por el que se han alcanzado las combinaciones precio-cantidad iniciales.

dad que I: $q_2 = q_1$. Sustituyendo $q_2 = q_1$ en la función de la demanda de I (6-41),

$$p_1 = 100 - 3\,q_1 \tag{6-45}$$

Dado que II mantiene su participación en el mercado, el precio de I es función solamente de q_1. La función de demanda dada por (6-45) es válida para $p_1 < 70$ y $q_1 > 10$. Formando, a partir de (6-45), una función de ingreso total, puede derivarse la función de *IMa* de I para disminuciones de precios:

$$I_1 = q_1\,(100 - 3\,q_1)$$

y

$$\frac{dI_1}{dq_1} = 100 - 6\,q_1 \tag{6-46}$$

Siendo $q_1 = 10$, el *IMa* de I por una disminución del precio es 40 dólares.

La situación inicial representa un punto de máximo beneficio para I. Su *CMa* para un output de 10 unidades es de 50 dólares. I no puede aumentar su beneficio aumentando el precio (reduciendo su nivel de

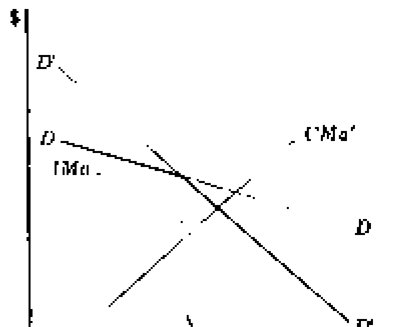


Figura 6-5

output) puesto que el *IMa* es mayor que *CMa* ($53^1/_3 > 50$) y esta diferencia se incrementaría si se aumentara el precio. Tampoco puede aumentar su beneficio reduciendo el precio (aumentando su nivel de output) ya que *IMa* es menor que *CMa* ($40 < 50$) y esta diferencia se haría mayor para las siguientes reducciones del precio. Para cualquier valor de *CMa* comprendido entre $53\,^1/_3$ y 40 dólares, su combinación precio-cantidad inicial es óptima. Una reducción de 10 o menos dólares en su *CMa* no le inducirá a disminuir su precio y aumentar sus ventas. Asimismo, un aumento de $3\,^1/_3$ o menos dólares en su *CMa* no le moverá a aumentar su precio y reducir sus ventas.

Gráficamente, la curva de demanda efectiva de I está "apuntada" y su curva de *IMa* efectivo es discontinua al nivel inicial de su output. Si II reacciona en forma conducente a mantener a su participación en el mercado, su curva de demanda es *D'D'* (véase figura 6-5) y si reacciona con la intención de mantener su precio, es *DD*. Las porciones de trazado grueso de estas curvas de demanda constituyen su curva de demanda efectiva. *DD* es válida para aumentos de precio y *D'D'* para disminuciones. A la izquierda del nivel inicial de output la curva efectiva de *IMa* sigue a la curva de *IMa* correspondiente a *DD* y, hacia la derecha, a la curva de *IMá* correspondiente a *D'D'*. I es incapaz de igualar *IMa* y *CMa*.

La solución de la teoría de los juegos. — La teoría matemática de los juegos se aplica a situaciones de mercado en las que el resultado *depende de las actuaciones de participantes con intereses contrapuestos.* Dentro de esta categoría encajan corrientemente las situaciones de duopolio, oligopolio, y monopolio bilateral (un mercado con un solo vendedor y un solo comprador). Los duopolistas están en conflicto si la actuación de uno de ellos redunda en una disminución del beneficio del otro. La teoría de los juegos, proporciona unos supuestos de conducta *específicos que determinan un equilibrio para tal mercado,* aunque completamente distinto del proporcionado por las otras soluciones.

Un juego puede consistir en una serie de movimientos como en el ajedrez, o en un solo movimiento por parte de cada uno de sus participantes. El análisis presente se limita a juegos de un solo movimiento. En este contexto, una *estrategia* es la especificación de un movimiento concreto de uno de los participantes. La estrategia de un duopolista consiste en seleccionar un valor concreto para cada una de las variables bajo su control. Si el precio es su única variable, la estrategia consiste en escoger un precio particular. Si las variables son el precio y el gasto de publicidad, la estrategia consiste en seleccionar valores concretos para cada uno de ellos. Se supone que cada participante posee un número finito de estrategias aunque este número puede ser muy grande. Este supuesto excluye la posibilidad de una variación continua de las variables de acción. Una vez que cada duopolista ha escogido una estrategia el resultado del juego duopolista, o sea el beneficio ganado por cada uno de los participantes, se determina a partir de las relaciones relevantes de demanda y coste.

Los juegos se clasifican de acuerdo con dos criterios: 1.º el número de participantes, y 2.º el resultado neto. El primer criterio implica meramento el recuento del número de participantes con intereses contrapuestos. Hay juegos de una, dos, tres, y el caso general de n personas. El segundo criterio permite una distinción entre juegos de suma cero y de suma no-cero. Un juego de suma cero es aquel para el que la suma algebraica de resultados, o sea beneficios de todos los participantes, es igual a cero para cualquier combinación posible de estrategias. Si por lo menos en una combinación de estrategias el resultado neto de un juego es distinto de cero, se le clasifica como juego de suma no-cero.

Un juego unipersonal de suma cero no es interesante puesto que en él el jugador no gana nada, independientemente de la estrategia que elija. El monopolista o monopsonista pueden considerarse como participantes únicos de un juego unipersonal de suma no-cero. El análisis presente se limita a juegos de dos personas, que sumen cero, y puede aplicarse a un mercado duopolista en el que la ganancia de un participante es siempre igual al valor absoluto de la pérdida del otro. En general, si I tiene m estrategias y II n, los posibles resultados del juego vienen dados por la matriz de beneficio

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \tag{6-47}$$

donde a_{ij} es el beneficio de I si emplea su i^a estrategia y II emplea su j^a. Puesto que el juego es suma cero, el beneficio correspondiente percibido por II es $-a_{ij}$.

Consideremos la matriz de beneficio como un ejemplo específico

$$\begin{vmatrix} 8 & 40 & 20 & 5 \\ 10 & 30 & -10 & -8 \end{vmatrix} \tag{6-48}$$

Si I emplea su primera estrategia y II su segunda, el beneficio de I es 40, y el de II —40. Si I emplea su segunda estrategia y II su tercera, el beneficio de I es —10 y el de II es 10.

El problema de decisión del duopolista consiste en escoger una estrategia óptima. I desea el resultado (40) de la primera fila y segunda columna de (6-48), y II desea el (—10) de la segunda fila y tercera columna. El resultado final depende de las estrategias de ambos duopolistas y ninguno de los dos puede forzar los deseos del otro. Si I selecciona su primera estrategia, II puede escoger su cuarta y el resultado sería 5 en vez de 40. Si II escoge su tercera estrategia, I puede escoger su primera, y el resultado sería entonces 20, en vez de —10. La teoría de los juegos postula formas de comportamiento que permiten la determinación del equilibrio en estas situaciones. I teme que II descubra la estrategia elegida por él y desea "jugar sobre seguro". Si I escoge su i^a estrategia, su beneficio mínimo, y por lo tanto el máximo de II, vendrá dado por elemento menor de la i^a fila de la matriz de beneficio: $\min_j a_{ij}$. Este es su beneficio esperado del empleo de la estrategia i^a, si se confirman sus temores acerca del conocimiento y comportamiento de II. Si II no acierta a escoger la estrategia apropiada, el beneficio de I sobrepasará la magnitud anterior. I desea maximizar su beneficio mínimo esperado. Por ello, escoge la estrategia i^a que tiene el mayor $\min_j a_{ij}$. El resultado esperado es $\max_i \min_j a_{ij}$. No puede percibir un beneficio menor, pero sí uno mayor.

II tiene los mismos temores acerca de la información y conducta de I. Si II emplea su estrategia j^a, teme que I emplee la estrategia correspondiente al elemento mayor de la columna j^a de la matriz de beneficio: $\max_i a_{ij}$. Por lo tanto, II escoge la estrategia j^a para la cual $\max_i a_{ij}$ es mínimo, y su expectativa de beneficio es $-\min_j \max_i a_{ij}$. Las decisiones de los duopolistas son consistentes y se consigue el equilibrio si

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Volviendo al ejemplo dado en (6-48), I empleará su primera estrategia. Si II prevé su elección, el beneficio de I será de 5. Si I emplea su segunda estrategia y II prevé su elección, su beneficio será de —10. II empleará su cuarta estrategia y limitará su pérdida a 5. Cualquier otra columna de (6-48) tiene un máximo mayor de 5. En este caso

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{14} = 5$$

Las decisiones de los duopolistas son consistentes y se establece un equilibrio. Ninguno de los dos duopolistas puede aumentar su beneficio cambiando de estrategia si la de su rival permanece inalterada.

Supongamos que la matriz de beneficio sea

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 10 \end{vmatrix} \tag{6-49}$$

en la que I tiene dos estrategias y II tiene cuatro. Introduciendo el concepto de dominio pueden simplificarse la matriz de beneficio y su correspondiente problema de juego. Un ligero examen de (6-49) muestra que, independientemente de la elección de I, II no empleará nunca su tercera estrategia puesto que siempre le resultará mejor la primera. Cada elemento de la tercera columna es mayor, y representa por lo tanto, una mayor pérdida para II, que el correspondiente elemento de la primera. En general, si $a_{ij} \leqq a_{ik}$ para todas las i y $a_{ij} < a_{ik}$ para por lo menos una i, la columna j^a domina la k^a. La cuarta columna de (6-49) está dominada tanto por la primera y por la segunda columnas. El dominio puede definirse también con respecto a las estrategias de I. En general, si $a_{ij} \geqq a_{hj}$ para todas las j y si $a_{ij} > a_{hj}$ al menos para una j, la fila i^a domina la h^a. En (6-49) ninguna fila domina a otra. Un jugador racional no empleará nunca una estrategia dominada. Por tanto, la matriz del beneficio puede simplificarse mediante la eliminación de todas las estrategias dominadas.

Eliminando las columnas tercera y cuarta de (6-49), la matriz de beneficio se convierte en

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \tag{6-50}$$

Siguiendo las reglas establecidas anteriormente, I deseará emplear su segunda estrategia y II deseará emplear su primera. Estas decisiones no son consistentes:

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{22} = -1 \neq 3 = a_{21} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Si los duopolistas emplean estas estrategias, el resultado inicial será $a_{21} = 3$. Si II emplea su primera estrategia, I no podrá aumentar su beneficio mediante el cambio de estrategia. Sin embargo, si I emplea su segunda estrategia, II puede disminuir su pérdida de —1, pasando a utilizar su segunda estrategia. I puede aumentar su beneficio de —1 a 4 aplicando su primera: II puede entonces disminuir su pérdida de 4 a —2 aplicando su primera. Los supuestos que llevan a una situación de equilibrio en (6-48) producen interminables fluctuaciones en (6-50).

El problema de juego dado por (6-50) puede resolverse permitiendo a los duopolistas que elijan sus estrategias sobre una base probabilística. Sean las probabilidades de que I utilice su primera y segunda estrategia r y $(1 - r)$ respectivamente, donde $0 \leqq r \leqq 1$. Si escogiera probabilidades de 0,5 para cada estrategia, podría lanzar al aire una moneda y emplear la primera estrategia cuando saliera "cara" y su segunda cuando fuera "cruz". Tal elección al azar no permitiría a II prever la elección de I incluso conociendo las probabilidades de sus estrategias.

II puede igualmente dejar al azar la elección de su estrategia atribuyéndolas las probabilidades s y $(1-s)$, donde $0 \leqq s \leqq 1$. En estas condiciones, los duopolistas están interesados en los beneficios esperados, no en los reales. El beneficio esperado de un duopolista es igual a la suma de los resultados posibles, multiplicado cada uno por su probabilidad de verificación. Por ejemplo, si II emplea su primera estrategia con una probabilidad de uno, y I escoge las probabilidades r y $(1-r)$, el beneficio esperado de I es $ra_{11} + (1-r)a_{21}$. Si II emplea su segunda estrategia con una probabilidad de uno, el beneficio esperado de I será de $ra_{21} + (1-r)a_{22}$.

El problema de decisión de cada duopolista consiste en escoger una serie óptima de probabilidades. Las probabilidades que emplean serán óptimas si

$$\begin{aligned} ra_{11} + (1-r)\, a_{21} &\geqq V \\ ra_{12} + (1-r)\, a_{22} &\geqq V \end{aligned} \qquad (6\text{-}51)$$

y

$$\begin{aligned} sa_{11} + (1-s)\, a_{12} &\leqq V \\ sa_{21} + (1-s)\, a_{22} &\leqq V \end{aligned} \qquad (6\text{-}52)$$

donde V se define como *el valor del juego*. Las relaciones de (6-51) establecen que si II emplea cualquiera de sus dos estrategias puras con la probabilidad de uno, el beneficio esperado de I es por lo menos de V. Las relaciones de (6-52) establecen que si I emplea cualquiera de sus dos estrategias puras con una probabilidad uno, la pérdida esperada de II es por lo menos de V. Puede probarse que siempre existen valores de r y s que satisfacen (6-51) y (6-52) y que el valor de V es único.

Si ambos duopolistas escogen sus estrategias sobre una base probabilística, el beneficio esperado de I puede determinarse a partir de (6-51):

$$E_1 = s\,[ra_{11} + (1-r)\, a_{21}] + (1-s)\,[ra_{12} + (1-r)\, a_{22}] \geqq sV + (1-s)V$$

o $$E_1 = sra_{11} + s\,(1-r)\, a_{21} + (1-s)\, ra_{12} + (1-r)\,(1-s)\, a_{22} \geqq V \qquad (6\text{-}53)$$

De (6-52) puede igualmente determinarse la pérdida esperada de II.

$$E_2 = r\,[sa_{11} + (1-s)\, a_{12}] + (1-r)\,[sa_{21} + (1-s)\, a_{22}] \leqq rV + (1-r)V$$

o $$E_2 = rsa_{11} + s\,(1-r)\, a_{21} + (1-s)\, sa_{12} + (1-r)\,(1-s)\, a_{22} \leqq V \qquad (6\text{-}54)$$

Los lados izquierdos de (6-53) y (6-54) son idénticos; el beneficio esperado de I iguala la pérdida esperada de II. Combinando (6-53) y (6-54):

$$V \leqq E_1 = E_2 \leqq V$$

lo que prueba que

$$E_1 = E_2 = V$$

El resultado esperado es el mismo para cada uno de los duopolistas e igual al valor del juego si ambos emplean sus probabilidades óptimas. Prescindiendo de la estrategia elegida por II, si I emplea sus probabilidades óptimas, su beneficio esperado no puede ser menor que V. Será mayor que V si II emplea una serie de probabilidades que no sean óptimas. Asimismo, prescindiendo de la estrategia elegida por I, si II emplea sus probabilidades óptimas, su pérdida esperada no podrá ser mayor que V. Será menor, si I emplea una serie de probabilidades que no sean óptimas.

Reduciendo el problema teórico del juego a un problema de programación lineal, pueden determinarse las probabilidades óptimas de I (véase Sección 3-7). Definamos las variables

$$z_1 = \frac{r}{V} \qquad \text{y} \qquad z_2 = \frac{1 - r}{V} \tag{6-55}$$

Según esta definición

$$\frac{1}{V} = z_1 + z_2 \tag{6-56}$$

I desea hacer su beneficio esperado lo mayor posible, o lo que es equivalente, desea hacer que $1/V$ sea lo menor posible. Su problema de programación consiste en encontrar valores de z_1 y z_2 que minimicen (6-56) sujetos a

$$\begin{aligned} a_{11} z_1 + a_{21} z_2 &\geqq 1 \\ a_{12} z_1 + a_{22} z_2 &\geqq 1 \end{aligned} \tag{6-57}$$

tales como $z_1, z_2 \geqq 0$.[8] Las relaciones de (6-57) se derivan sustituyendo (6-55) en (6-51). Utilizando el método de solución descrito en la Sección 3-7, la solución óptima del problema del juego dado en (6-50) es $z_1 = 0{,}4$, $z_2 = 0{,}6$ y $1/V = 1$. De (6-55), $r = 0{,}4$, y $(1 - r) = 0{,}6$.

El otro aspecto del problema de programación lineal de I es encontrar los valores de w_1 y w_2 que maximicen

$$w_1 + w_2$$

sujetos a

$$\begin{aligned} a_{11} w_1 + a_{12} w_2 &\leqq 1 \\ a_{21} w_2 + a_{22} w_2 &\leqq 1 \end{aligned}$$

8 No es necesario que el valor del juego sea positivo. Puede ser negativo o cero. Para asegurar que $V > 0$ y por lo tanto $z_1, z_2 \geqq 0$, escojamos un número U con la propiedad de que $a_{ij} + U > 0$ para todas las i y j, y añádase U a cada elemento de la matriz de beneficio. Esta operación aumenta el valor del juego en U, pero no cambia las probabilidades óptimas. Véase J. G. Kemeny, J. L. Snell, y G. L. Thompson, *Introduction to Finite Mathematics* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1957), pág. 281.

tales que w_1, $w_2 \geqq 0$. Haciendo $w_1 = s/V$ y $w_2 = (1 - s)/V$, el problema dual permite la determinación de las probabilidades óptimas de II. La solución del problema dual del juego dado por (6-50) es $w_1 = 0{,}5$, $w_2 = 0{,}5$, y $1/V = 1$. Las probabilidades óptimas de II son $s = 0{,}5$ y $(1 - s) = 0{,}5$.

Es posible generalizar el análisis a juegos más complicados pero ello requiere un conocimiento de las matemáticas superior al supuesto en este libro. Para aplicaciones económicas es necesario modificar el análisis previo en diferentes sentidos ya que los requisitos del supuesto suma-cero se cumplen muy raramente en la situación real del mercado. El problema del duopolio puede extenderse al problema del juego de dos personas, de suma no-cero, o lo que es equivalente, a uno de tres personas de suma-cero, en el que la tercera persona es una entidad artificial — "Naturaleza" — cuyo resultado es igual a los resultados combinados de los duopolistas con signo negativo. En juegos de dos o más personas se presenta la posibilidad de establecer coaliciones. Por ejemplo, los duopolistas pueden actuar conjuntamente a fin de maximizar el beneficio de la industria. En un mercado oligopolístico, dos o más de los participantes pueden unirse en detrimento de sus rivales.

6-3. Diferenciación de producto: muchos compradores

El caso de competencia monopolística con muchos vendedores contiene a la vez elementos de monopolio y de libre competencia.[9] Se parece a la libre competencia en que el número de vendedores es lo suficientemente grande para que la acción de uno solo no tenga influencia perceptible sobre sus competidores. Se parece al monopolio y al oligopolio diferenciado en que el producto diferenciado de cada vendedor tiene una curva de demanda de inclinación negativa.

Dando por supuestas curvas de demanda lineales, el precio recibido por cada comprador, es función de las cantidades vendidas por cada una de las n empresas de esa industria:

$$p_k = A_k - a_{kk}q_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} b_{ki}q_i \qquad (k = 1, \ldots, n) \qquad (6\text{-}58)$$

en la que $\partial p_k/\partial q_i = -b_{ki}$ es negativo, pero numéricamente pequeño. Supongamos, para facilitar la exposición, que todas las empresas tienen

9. Véase Edward H. Chamberlin, *The Theory of Monopolistic Competition* (7.ª ed., Cambridge, Mass.; Harvard University Press, 1956).

idénticas funciones de demanda y coste, o sea, $b_{ki} = b$ para todas las k e i, excepto $k = i$, $a_{kk} = a$, $A_k = A$, y $C_k(q_k) = C(q_k)$ para todas las k. Suponiendo igualmente que todas las empresas tengan combinaciones iniciales idénticas de precio-cantidad, se puede describir la industria en términos de las actuaciones de una empresa "representativa". Aunque a los ojos de los consumidores se diferencien los productos de todas las empresas, sus funciones de ingreso y coste y su conducta respecto a la optimización son idénticos. La curva de demanda con que se encuentra la empresa representativa se convierte en:

$$p_k = A - aq_k - b \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} q_i \tag{6-59}$$

El beneficio de la empresa representativa es

$$\pi_k = q_k \Big(A - aq_k - b \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} q_i \Big) - C(q_k) \tag{6-60}$$

Puesto que b es numéricamente pequeño y un cambio cuantitativo por parte de la empresa representativa afecta por igual a cada uno de sus $(n - 1)$ competidores, pueden despreciarse los efectos de su actuación sobre el precio de cualquier competidor particular. Por lo tanto, el empresario de la empresa representativa actúa como si su acción no ejerciera efecto alguno en sus competidores. Igualando su *IMa* y su *CMa* bajo el supuesto de que los niveles de output de sus competidores permanecen inalterados:

$$A - 2aq_k - b \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} q_i = C'(q_k) \tag{6-61}$$

La condición de segundo grado exige que su *CMa* aumente más rápidamente que su *IMa*. El nivel de output óptimo de la empresa k^a depende de los niveles de output normales de todos sus competidores.

El supuesto de simetría asegura que si una acción determinada es provechosa para la empresa representativa, también lo es para las demás. Todas las empresas intentarán maximizar su beneficio simultáneamente y las variaciones cuantitativas de la empresa k^a irán acompañadas de variaciones idénticas en las demás empresas de la industria. La empresa representativa no se moverá a lo largo de la curva de demanda (6-59), construida bajo el supuesto de que no se alteran los niveles de output de las demás empresas. Su curva de demanda efectiva se forma sustituyendo $q_k = q_i$ en (6-59):

$$p_k = A - [a + (n-1)\, b]\, q_k \tag{6-62}$$

El número $(n-1)$ no es de magnitud despreciable. Un aumento de un 1 % en el nivel de output de un competidor puede hacer que p_k disminuya en un 0,02 %, pero un aumento simultáneo de un 1 % en las mil empresas haría disminuir a p_k en un 20 % o más. La curva de demanda efectiva (6-62), que representa movimientos idénticos y simultáneos de todos los vendedores, es más inclinada que la (6-59). El empresario de la empresa representativa puede darse cuenta de que no puede moverse a lo largo de su curva de demanda individual, pero esta información no le sirve de nada, puesto que carece de control sobre los niveles de output de sus competidores. Las otras empresas cambian sus niveles de output porque pueden aumentar sus beneficios. Sus acciones no están regidas por las de la empresa representativa. Ésta debe actuar igual que las demás y aprovechar la ocasión de aumentar su beneficio.

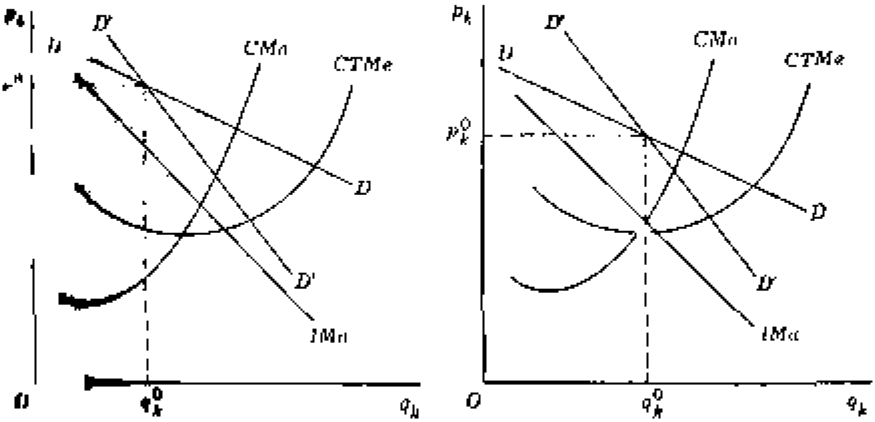
La empresa representativa, que parte de una combinación inicial arbitraria de precio-cantidad, se enfrenta con dos curvas de demanda distintas. En la figura 6-6*a*, *DD* es su curva de demanda debida únicamente a variaciones de su propio nivel de output, y *D'D'* es su curva de demanda efectiva resultante de variaciones idénticas de los niveles de output de todas las empresas de la industria. En la combinación inicial de precio-cantidad se cortan las dos curvas. A medida que todas las empresas aumentan sus niveles de output, la forma y posición de *D'D'*, que es función sólo de q_k, [véase (6-62)], permanece inalterada, y *DD*, cuya posisición depende de los outputs de todas las empresas [véase (6-59)], "se desliza" a lo largo de *D'D'*, cortándola siempre al nivel normal de output de la empresa representativa.

La industria alcanza el equilibrio cuando en todas las empresas el *IMa* se iguala a *CMa*. Los valores de las n cantidades desconocidas se hallan resolviendo las n ecuaciones simultáneas de (6-61). Por medio de métodos más avanzados se puede probar que el supuesto de simetría garantiza que (6-61) dará por resultado la igualdad de los niveles de output de las n empresas. Por tanto, es posible llegar directamente a la solución sustituyendo $q_k = q_i$ en (6-61) y resolviendo

$$A - [2a + (n-1)\, b]\, q_k = C'(q_k) \tag{6-63}$$

para q_k.[10] Esta última formulación comprende una sola ecuación con una variable. El beneficio máximo y la combinación óptima precio-cantidad son los mismos en todas las empresas. En la figura 6-6*b* se representa una descripción gráfica del equilibrio a corto plazo. En la combinación precio-cantidad de equilibrio, *IMa* y *CMa* se igualan, y *DD* corta *D'D'*.

En una industria de competencia perfecta, la libre entrada y libre salida de las empresas de la industria hace que se anule el beneficio



(*a*) (*b*)

Figura 6-6

pero, el mismo efecto puede producirse en el caso de competencia monopolística con muchos vendedores. Si en (6-60) sustituimos $q_k = q_i$, el beneficio de la empresa representativa puede expresarse en función de su propio output y del número de empresas dentro de la industria:

$$\pi_k = Aq_k - [a + (n-1)\,b]\,q_k^2 - C\,(q_k) \qquad (6\text{-}64)$$

Igualando π_k a cero, (6-63) y (6-64) forman un sistema de dos ecuaciones con dos variables, q_k y n. La solución de esas ecuaciones da los valores de equilibrio a largo plazo del nivel de output de la empresa representativa y el número de empresas en la industria.

En la figura 6-7 está representada la posición de equilibrio a largo plazo de la empresa representativa. Si el beneficio neto de la empresa

10 Esta solución no es la misma que para un mercado oligopólico en el que cada uno de los empresarios sabe que (6-62) es su curva de demanda efectiva. En este caso $IMa = A - [2a + 2(n-1)b]q_k$, o $(n-1)bq_k$ dólares de menos en cada unidad de output. El nivel de output al que se igualan *IMa* y *CMa* es más pequeño que el obtenido de una solución de (6-63).

representativa es mayor que cero, otras nuevas empresas pretenderán entrar en la industria, si se mantiene el precio dado. Al aumentar el número de empresas, la empresa representativa solamente podrá vender una cantidad menor de output, o sea: DD y $D'D'$ se desplazarán a la izquierda. El equilibrio a largo plazo se alcanza cuando IMa se iguala a CMa, DD es tangente a la curva de coste medio (lo cual indi-

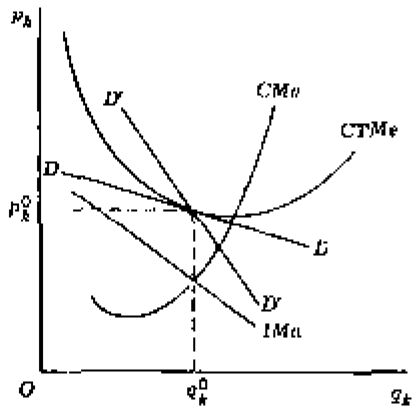


FIGURA 6-7

ca que el ingreso total iguala el coste total y por lo tanto que el beneficio es cero), y el punto de tangencia es el de intersección con $D'D'$.

El punto de equilibrio a largo plazo de empresa representativa se halla a la izquierda del punto mínimo de su curva de coste total medio. El precio se iguala al coste medio; igual ocurre con la empresa representativa en libre competencia, pero el precio no se iguala a CMa. Comparada con el resultado de la libre competencia, la empresa representativa produce un output menor a un coste total medio mayor.

6-4. Monopsonio

Las secciones precedentes tratan de empresarios que adquieren sus inputs en mercados de libre competencia. Los precios de los inputs son invariables con respecto a las cantidades adquiridas. En la sección presente se analiza la conducta del monopsonista, el empresario que actúa como comprador único de un input determinado. Un monopsonista no puede adquirir una cantidad ilimitada de un input a un precio uniforme; el precio que debe pagar por cada unidad adquirida viene dado por la curva de oferta del mercado del input. Como las curvas de oferta de la mayoría de los inputs tienen inclinación positiva, generalmente, el precio que tiene que pagar el monopsonista es función creciente de la cantidad que adquiere.

Consideremos primero el caso de un monopsonista que utiliza un solo input, que llamaremos trabajo, para la elaboración de un producto que vende en un mercado de libre competencia. Ejemplo de lo anterior puede ser el productor que es único comprador de trabajo en un mercado local y vende su output en un mercado nacional de libre competencia o en el mercado internacional. Su función de producción da el output en función de la cantidad de trabajo (x) empleada:

$$q = h(x) \tag{6-65}$$

La ecuación del coste y la función del ingreso son, como antes:

$$I = pq \qquad C = rx$$

en la que r es el precio del trabajo. Ahora, sin embargo, el precio del trabajo es función creciente de la cantidad empleada:

$$r = g(x) \tag{6-66}$$

en donde $dr/dx > 0$. *El coste marginal del trabajo* es la relación de la variación del coste respecto de la de la cantidad empleada:[11]

$$\frac{dC}{dx} = r + xg'(x) \tag{6-67}$$

Al ser $g'(x) > 0$, para $x > 0$ el coste marginal del trabajo excede su precio.

El beneficio del monopsonista puede expresarse en función de la cantidad de trabajo que emplea:

$$\pi = I - C = ph(x) - rx \tag{6-68}$$

Igualando a cero la derivada de (6-68) con respecto a x,

$$\frac{d\pi}{dx} = ph'(x) - r - xg'(x) = 0$$

$$ph'(x) = r + xg'(x) \tag{6-69}$$

11 El lector debería notar que aquí el coste marginal, en vez de definirse respecto a la cantidad de output producido, lo es respecto a la cantidad de trabajo empleada. La forma abreviada (CMa) se reserva para el coste marginal con respecto al nivel de output.

La condición de primer grado para la maximización del beneficio exige que se sigan utilizando nuevas unidades de trabajo hasta que el valor de su productividad marginal iguale su coste marginal. La condición de segundo grado requiere que la relación de la variación del valor de la productividad marginal del trabajo sea menor que la relación de la variación del coste marginal:

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = ph''(x) - 2g'(x) - xg''(x) < 0$$

$$ph''(x) < 2g'(x) + xg''(x) \qquad (6\text{-}70)$$

Hallando el valor de x en (6-69) y sustituyendo el valor para el que satisface la condición del segundo grado en (6-65) y (6-66) se determinan el output óptimo del monopsonista y el precio del trabajo.

El monopsonista que maximice su beneficio (véase figura 6-8) empleará x^0 unidades de trabajo a un tipo de salario de r^0 dólares. La igualdad entre el precio y la productividad marginal del trabajo, el punto de

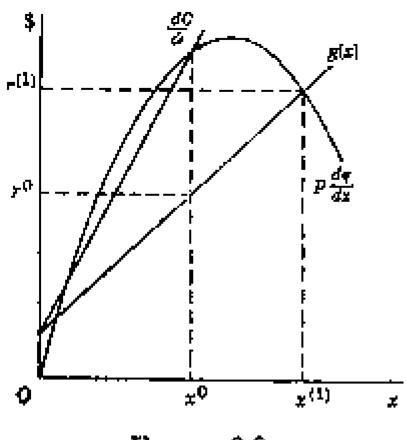


FIGURA 6-8

equilibrio para un empresario que adquiere trabajo en un mercado de libre competencia, dará por resultado el empleo de $x^{(1)}$ unidades de trabajo a un tipo de salario de $r^{(1)}$. El monopsonista emplea una cantidad menor de trabajo a un nivel de salario más bajo.

Si las funciones de la producción del monopsonista y de la oferta de trabajo son:

$$q = 15x^2 - 0{,}2x^3 \qquad r = 144 + 23{,}4x$$

y el monopsonista vende su output en un mercado de libre competencia al precio de 3 dólares, la función de su ingreso total y la ecuación de costes serán:

$$I = 45\,x^2 - 0{,}6\,x^3 \qquad C = 144\,x + 23{,}4\,x^2$$

Igualando el valor de la productividad marginal del trabajo a su coste marginal,

$$90\,x - 1{,}8\,x^2 = 144 + 46{,}8\,x$$

que nos da la ecuación cuadrática:

$$1{,}8\,x^2 - 43{,}2\,x + 144 = 0$$

con las raíces $x = 4$ y $x = 20$. La condición de segundo grado

$$90 - 3{,}6\,x < 46{,}8$$

se satisface para $x = 20$. La solución $x = 4$ es una posición de beneficio *mínimo*. Sustituyendo $x = 20$ en las funciones apropiadas

$$q = 4.400 \qquad r = 612 \quad \pi = 960$$

Si el monopsonista es a la vez monopolista en el mercado de su output, el precio que recibe es función de la cantidad que vende:

$$p = F\,(q)$$

Su beneficio puede expresarse, de nuevo, en función de la cantidad de trabajo que emplea:

$$\pi = pq - rx = F[h\,(x)]\,h\,(x) - rx$$

o más simplemente,

$$\pi = I\,(x) - C\,(x) \tag{6-71}$$

en donde el ingreso y el coste total se expresan como funciones de la cantidad de trabajo empleada. Igualando a cero la derivada de (6-71) nos da la *condición de primer grado que indica que la relación* de aumento del ingreso total resultante del empleo de otra unidad de trabajo (el ingreso marginal producto del trabajo) debe ser igual a su costo marginal. La condición de segundo grado requiere que el ingreso marginal producto del trabajo aumente más lentamente que su coste marginal.

6-5. Resumen

Una empresa monopolística constituye una industria y su actuación no se ve restringida por la competencia de rivales próximos; un monopolista es libre de escoger cualquier combinación precio-cantidad que esté en su curva de demanda de inclinación negativa. Puesto que un aumento de output, redunda en una reducción de su precio, su *IMa* es menor que su precio. Su condición de primer grado para la maximización del beneficio requiere la igualdad de *IMa* y *CMa*. Su condición de segundo grado requiere que su *CMa* aumente más lentamente que su *IMa*.

Si se satisfacen las condiciones de segundo grado, el monopolista discriminador maximiza su beneficio igualando su *IMa* en cada mercado al *CMa* de su output global. Asimismo, el monopolista con fábricas múltiples maximiza su beneficio igualando el *CMa* de cada fábrica, con el *IMa* de todo su output.

Ni una cuota fija, ni el impuesto sobre el beneficio afectarán la combinación óptima precio-cantidad de un monopolista que maximice el beneficio. La imposición de un impuesto sobre venta tanto específico como *ad valorem* tendrá como resultado una disminución de su output y un aumento del precio.

El beneficio de un duopolista o un oligopolista depende de las acciones y de las reacciones de sus rivales. Las diferentes teorías se basan sobre distintos supuestos acerca de la conducta del mercado. La solución de Cournot tiene lugar cuando cada participante en el mercado maximiza su beneficio bajo el supuesto de que sus acciones no afecten los niveles de output de sus rivales. La solución de colusión, cuando los participantes en el mercado se unen para maximizar el beneficio total de la industria. La solución de Stackelberg se verifica cuando los duopolistas *reconocen explícitamente la interdependencia de sus acciones.* Cada uno desea asumir el papel de líder o de seguidor y se alcanza el equilibrio del mercado si sus deseos son compatibles. Estas tres soluciones son aplicables tanto para productos homogéneos como para productos diferenciados. Los productores de artículos diferenciados pueden encontrar provechosa la publicidad.

Se lleva a cabo la solución de participaciones del mercado cuando cada participante del mismo reacciona a los movimientos de sus rivales de forma conducente a mantener su participación histórica en las ventas totales de la industria. Y el mercado se ajusta según la solución *de la curva de demanda apuntada cuando cada vendedor supone que* sus rivales seguirán sus reducciones de precios, pero no sus aumentos. En el caso de dos personas y suma cero, la solución de la teoría de los juegos se basa en el supuesto de que cada duopolista quiere "jugar seguro" y para maximizar su beneficio escoge una estrategia o combinación de estrategias, dada la elección más desfavorable de estrategia por parte de su rival.

En el caso de competencia monopolística con muchos vendedores, el vendedor individual tiene una curva de demanda de su producto diferenciado negativamente inclinada, pero su output constituye una parte tan pequeña del mercado total que sus acciones no tienen efectos perceptibles sobre sus rivales. Sin embargo, movimientos simultáneos de todos los vendedores causan alteraciones en las curvas de demanda individuales. El equilibrio a corto plazo se alcanza cuando cada vendedor ha igualado el *IMa* y el *CMa*. A largo plazo el número de empresas dentro de la industria aumenta o disminuye lo suficiente para anular el beneficio neto de la empresa representativa.

El monopsonista se enfrenta con una curva de oferta de un input creciente. El monopsonista puede ser, por ejemplo, el único comprador de un tipo particular de trabajo. El coste marginal del trabajo del monopsonista excede el nivel de salarios, ya que para aumentar el número de trabajadores debe aumentar el salario a cada uno de los existentes. La condición de primer grado para la maximización del beneficio exige que emplee trabajo hasta que el valor de su productividad marginal iguale a su coste marginal. Si el monopsonista es también un monopolista en el mercado de su producto, la condición de primer grado exige que iguale la productividad del ingreso marginal proveniente del trabajo a su coste marginal.

SELECCIÓN DE CITAS

BUCHANAN, NORMAN S., *Advertising Expenditures: A Suggested treatment*, "Journal of Political Economy", vol. 50 (agosto 1942), pp. 537-557. Editado también por R. V. Clemence (ed.), "Readings in Economic Analysis" (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1950), vol. 2, pp. 230-250. Una determinación geométrica del gasto de publicidad óptima de la empresa.

CHAMBERLIN, E. H., *The Theory of Monopolistic Competition* (7.ª ed.; Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1956). La primera exposición de los problemas de la competencia monopolística y de la diferenciación de producto. Emplea geometría. (Trad. al castellano: Fondo de Cultura Económica, Méjico.)

COURNOT, AUGUSTIN, *Researches into the Mathematical Principles of Theory of Wealth*, trad. por Nathaniel T. Bacon (Nueva York: Macmillan, 1897). La exposición original de la solución de Cournot. Es también una de las primeras aplicaciones de las matemáticas a la economía.

EFROYMSON, CLARENCE W., *A Note on Kinked Demand Curves*, "American Economic Review", vol. 33 (marzo 1943), pp. 98-109. Editado también por Clemence, "Readings in Economic Analysis", vol. 2, pp. 218-229. Una discusión no matemática de las curvas de demanda apuntadas y de los precios de coste total.

FELLNER, WILLIAM, *Competition Among the Few* (Nueva York: Knopf, 1949). Una discusión no matemática del oligopolio y el monopolio bilateral. Contiene una exposición de la solución de Stackelberg.

HICKS, J. R., *Annual Survey of Economic Theory: The Theory of Monopoly*, "Econometrica", vol. 3 (enero 1935), pp. 1-20. Editado también por American Economic Association, "Readings in Price Theory" (Homewood, Ill.: Irwin, 1952), pp. 361-383. Un examen de las teorías sobre competencia monopolística desarrolladas a finales de la tercera década y a principios de la cuarta.

MCKINSEY, J. C. C., *Introduction to the Theory of Games* (Nueva York: McGraw-Hill, 1952). Libro de texto. Se requieren conocimientos avanzados de cálculo. (Trad. al castellano: Aguilar, Madrid.)

NEUMANN, J. VON, y O. MORGENSTERN, *The Theory of Games and Economic Behavior* (2.ª ed.; Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1947). La aplicación original de la teoría de los juegos a los problemas económicos. Se explican los conceptos matemáticos necesarios dentro del libro.

NICHOLLS, WILLIAM H., *A Theoretical Analysis of Imperfect Competition with Special Application to the Agricultural Industries* (Ames, Iowa: Iowa State College Press, 1941). Contiene extensas descripciones no matemáticas de diversas clases de competencia monopolística. Particularmente útil para el análisis del oligopsonio.

ROBINSON, JOAN, *The Economics of Imperfect Competition* (Londres: Macmillan, 1933). Un estudio exhaustivo del monopolio, discriminación de precios y monopsonio en el que se desarrollan muchos conceptos modernos. El análisis se limita generalmente a la geometría.

TRIFFIN, ROBERT, *Monopolistic Competition and General Equilibrium Theory* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1940). Un examen de las teorías de la competencia monopolística y un intento de clasificar los mercados sobre la base de las elasticidades cruzadas de la demanda.

Capítulo 7

LA ECONOMÍA DEL BIENESTAR

El objetivo de la economía del bienestar es la valoración de la deseabilidad social de cada uno de los alternativos estados económicos. Se denomina estado económico a una organización determinada de las actividades y recursos económicos dentro de una economía. Los estados económicos pueden diferir en muchos aspectos: 1.º los mercados pueden ser de competencia perfecta o monopolística; 2.º estar en equilibrio o en desequilibrio; 3.º pueden existir diversas posiciones de equilibrio del multimercado, y la economía puede haber alcanzado uno de ellos. Cada estado se caracteriza por una distinta asignación de recursos y una distribución diferente de las remuneraciones. Aunque no siempre sea capaz el economista de prescribir un método con el que transformar un estado económico en otro, existirá habitualmente un conjunto de medidas políticas para cambiar la situación existente. Es importante conocer en tales casos, si el cambio considerado es o no deseable. Imaginemos, por ejemplo, que la economía puede alcanzar el equilibrio del multimercado con dos series distintas de precios de artículos y factores. Puesto que los deseos de consumidores y empresarios son consistentes en ambos equilibrios, la sociedad, si es que puede escoger entre ellos, únicamente puede basar la elección en el criterio del bienestar. Los principios mediante los que se intenta resolver tales problemas, caen dentro el dominio de la economía del bienestar.

El bienestar de una sociedad depende, en su más amplio sentido, de los niveles de satisfacción de todos sus consumidores.[1] Pero casi todas las alternativas que han de evaluar los economistas del bienestar, tendrán efectos favorables sobre unas personas y desfavorables sobre otras.

1. Las afirmaciones de esta naturaleza se basan en creencias éticas o juicios de valor y no pueden probarse. Es razonable postular que del concepto de bienestar social trasciende la noción más restrictiva de bienestar económico. Por razones obvias, el presente análisis trata sólo el último.

Las comparaciones de bienestar serían sencillas si fuese posible agregar las utilidades individuales en una sola función de utilidad. Desgraciadamente, esta operación no puede llevarse a cabo. Es imposible establecer comparaciones interpersonales de la utilidad. No existe una manera clara de determinar cuál de los dos individuos, el I o el II, deriva mayor satisfacción del consumo de un conjunto dado de bienes.[2] Las comparaciones de bienestar sobre la base de las utilidades individuales, solamente son posibles en un sentido muy restringido. Como resultado, las conclusiones de la economía del bienestar no son todo lo aplicables que sería de desear.

En la Sección 7-1, se estudian las condiciones de Pareto para la maximización del bienestar, así como el cumplimiento de estas condiciones en una economía de competencia perfecta. En la Sección 7-2, se esbozan las implicaciones sobre el bienestar de la competencia monopolística. En la Sección 7-3, se califica el argumento de la optimalidad de la competencia perfecta, mediante la introducción de funciones interdependientes de utilidad y de las economías y diseconomías externas. Finalmente, en la Sección 7-4, se consideran las funciones de bienestar social y otros criterios alternativos de evaluación de las mejoras en el bienestar social.

7-1. La eficiencia de la competencia perfecta

La eficiencia económica, a menudo llamada optimalidad u ofelimidad de Pareto, se define en términos de resultado de una o más actividades económicas. La distribución de los bienes de consumo (incluyendo el ocio y otros factores primarios, retenidos), entre los consumidores, es eficiente si cada posible redistribución de bienes entre los consumidores da lugar a la reducción de la satisfacción de, al menos, uno de ellos. La producción es eficiente, si cada posible redistribución de inputs entre (dentro de) las empresas, disminuye el nivel de output, de, al menos, una empresa (artículo). Se demostrará que, en ausencia de economías o diseconomías externas, un equilibrio perfectamente competitivo, satisface las condiciones del óptimo de Pareto.

Puesto que no pueden compararse los niveles de utilidad individuales, los cambios que mejoran las posiciones de algunos individuos, pero

2. En todo este capítulo se suponen funciones ordinales de utilidad. Puesto que la mensurabilidad no es para los consumidores individuales necesaria ni suficiente para las comparaciones interpersonales de utilidad, el escoger funciones cardinales de utilidad no eliminaría la dificultad.

geométrico de tales puntos es la *curva de contrato* CC. Su fórmula matemática viene dada por (7-5), que es función de q_{11} y q_{12}.

En el punto A, las relaciones de sustitución entre bienes son desiguales, y, por ello, *resulta posible aumentar los niveles de utilidad de ambos* consumidores alterando la distribución existente. Por ejemplo, si la posición final (después de una redistribución de Q_1 y Q_2), estuviese entre M y N, ambos consumidores habrían ganado con el cambio, puesto que ambos se encontrarían sobre curvas de indiferencia más altas que las que se cortan en A. Si el punto final está en M o N, *uno de los consumidores se encontrará en una posición mejor sin haber perjudicado la del otro*. Ahora bien, si con la redistribución se alcanza un punto de

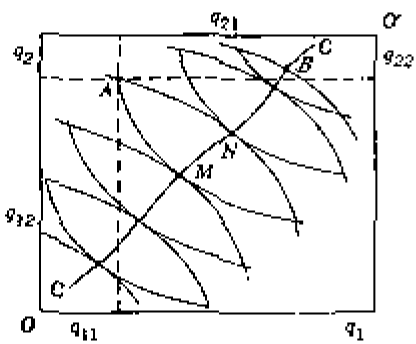


Figura 7-1

la curva de contrato, resulta imposible mejorar posteriormente la posición de cualquiera de los consumidores sin perjudicar la del otro. De acuerdo con las condiciones del óptimo de Pareto, cualquier punto entre M y N es claramente superior a A. Por el contrario, la evaluación de puntos alternativos de la curva de contrato, implicaría una comparación interpersonal de utilidad, con lo que la evaluación resulta imposible salvo que se introduzca explícitamente la creencia ética en la habilidad propia para hacer tales comparaciones.

El sector productivo. — Cuando existe competencia perfecta entre los productores de los mercados de artículos, los precios no se alteran por variaciones en el nivel de output de una empresa. En los mercados de factores la existencia de competencia perfecta entre los productores, exige que los precios que cada empresa paga por los inputs que emplea sean invariables ante variaciones en el volumen de sus compras de inputs.

Sea la función de producción de la empresa h^a, la función implícita:

$$F_h(q_{h1}, \ldots, q_{hm}) = 0 \tag{7-6}$$

donde q_{hk} ($k = 1, ..., s$) es un input, que se define como $q_{hk} = -x_{hk}$, y q_{hk}($k = s + 1, ..., m$) un output. Se demostró (véase Sección 3-6) que la maximización del beneficio, en condiciones de competencia perfecta, requiere que

$$-\frac{\partial q_{hk}}{\partial q_{hj}} = \frac{p_j}{p_k} \qquad (7\text{-}7)$$

Si ambos subíndices, el j y el k, se refieren a inputs, (7-7) garantiza que la *RTS* (relación técnica de sustitución), debe ser igual a la razón de los precios de los inputs. Si los subíndices se refieren a dos outputs, garantiza que la *RTP* (relación de transformación de productos), debe ser igual a la razón de los precios de los outputs. Si q_{hk} es un output y q_{hj} un input, (7-7) garantiza que la razón a la que un input puede transformarse en un output (*PMa*, o productividad marginal), debe ser igual a la razón de los precios del input y el output.

Las condiciones (7-7) garantizan el óptimo de Pareto, en el sector productivo. El argumento es análogo al empleado para el consumidor. Puesto que cada empresario se ajusta a los precios con los que se enfrenta en el mercado, sin alterarlos de modo notable, cada uno paga el mismo precio por un tipo dado de input, y percibe el mismo por un tipo dado de output; las *RTS*, *RTP* y *PMa* correspondientes, son las mismas para las N empresas:

$$-\frac{\partial q_{hk}}{\partial q_{hj}} = -\frac{\partial q_{ik}}{\partial q_{ij}} \qquad \begin{matrix} (i, h = 1, \ldots, N) \\ (j, k = 1, \ldots, m) \end{matrix} \qquad (7\text{-}8)$$

Las igualdades anteriores implican el cumplimiento de las condiciones del óptimo de Pareto, en los siguientes sentidos: 1.° si se redistribuyen los inputs entre las empresas, y como resultado aumenta el output de una, debe disminuir el de alguna otra, y 2.° si se redistribuyen los inputs entre sus distintos usos por todas o alguna de las empresas, de modo que si aumenta el output total de un artículo debe disminuir el output total de algún otro artículo.

En el presente contexto sólo se prueba la primera afirmación.[5] Supongamos que hay dos productores, que utilizan los inputs primarios X_1 y X_2, con las funciones explícitas de producción $q_1 = f_1(x_{11}, x_{12})$ y $q_2 = f_2(x_{21}, x_{22})$, donde $x_{11} + x_{21} = x_1^0$, y $x_{12} + x_{22} = x_2^0$ son las cantidades totales de los dos inputs, $q_1 + q_2 = q$ es el output total del artícu-

5. El lector puede verificar la prueba de la otra afirmación.

perjudican las de otros, no pueden evaluarse en términos de eficiencia; los efectos netos de los movimientos, pueden ser o no beneficiosos. Sin embargo, puede afirmarse que el bienestar aumenta (disminuye), si mejora (empeora), la posición de una persona, al menos, sin que se alteren las de las demás. Evidentemente, no puede alcanzarse un óptimo, a menos que se hayan verificado todas las mejoras posibles del tipo anterior. La competencia perfecta es un óptimo en este sentido, y un ideal de bienestar. [3]

El sector de consumo. — Según las hipótesis sobre la competencia perfecta entre consumidores, el precio de un artículo no se altera por variaciones en el nivel de consumo de un consumidor individual. De modo parecido, los precios del trabajo y de los otros factores primarios, son independientes de las ventas de cualquier consumidor individual.

La función de utilidad del consumidor i^o es:

$$U_i = U_i\,(q_{i1}, \ldots, q_{im}) \tag{7-1}$$

donde q_{ik} es la cantidad que consume de Q_k. Entre los bienes consumidos se incluyen las cantidades de factores primarios, tales como el trabajo que retiene (véase Sección 5-2). Los factores primarios retenidos se indican por el subíndice ($k = 1, \ldots, s$), y los artículos producidos por ($k = s + 1, \ldots, m$). Si existe competencia perfecta entre los consumidores, un consumidor maximiza su satisfacción si su *RSB* (relación de sustitución entre bienes) entre cada par de bienes es igual la razón de sus precios: [4]

$$-\frac{\partial q_{ik}}{\partial q_{ij}} = \frac{p_j}{p_k} \qquad (j, k = 1, \ldots, m) \tag{7-2}$$

Al ser los precios iguales para todos los consumidores, la competencia perfecta implica que las relaciones de sustitución entre Q_k y Q_j son las mismas para los n consumidores:

$$-\frac{\partial q_{ik}}{\partial q_{ij}} = -\frac{\partial q_{hk}}{\partial q_{hj}} \qquad \begin{matrix}(i, h = 1, \ldots, n)\\(j, k = 1, \ldots, m)\end{matrix} \tag{7-3}$$

Estas igualdades son necesarias para la consecución del óptimo de Pareto en el consumo. Para ilustrarlo, supongamos que existen solamen-

3 La presente discusión se limita a la eficiencia estática. No se dedica ninguna atención a las facetas de bienestar de la distribución temporal de recursos, el desarrollo temporal del bienestar, o los alternativos desarrollos temporales de la economía.

4 Desde luego, también deben cumplirse las condiciones de segundo grado. En el resto de esta sección se supone igualmente que se cumplen.

te dos consumidores, designados por los subíndices I y 2, y dos bienes, Q_1 y Q_2. Las funciones de utilidad de los consumidores, son: $U_1(q_{11}, q_{12})$ y $U_2(q_{21}, q_{22})$, donde $q_{11} + q_{21} = q_1^0$ y $q_{12} + q_{22} = q_2^0$. Supongamos, ahora, que el consumidor II disfruta del nivel de satisfacción U_2^0 = constante. Para maximizar la utilidad del consumidor I sujeta a esta restricción, formemos la función

$$U_1^* = U_1(q_{11}, q_{12}) + \lambda\,[U_2(q_1^0 - q_{11}, q_2^0 - q_{12}) - U_2^0]$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange, e igualemos a cero sus derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_1^*}{\partial q_{11}} &= \frac{\partial U_1}{\partial q_{11}} - \lambda\frac{\partial U_2}{\partial q_{11}} = 0\\
\frac{\partial U_1^*}{\partial q_{12}} &= \frac{\partial U_1}{\partial q_{12}} - \lambda\frac{\partial U_2}{\partial q_{12}} = 0\\
\frac{\partial U_1^*}{\partial \lambda} &= U_2(q_1^0 - q_{11}, q_2^0 - q_{12}) - U_2^0 = 0
\end{aligned}\tag{7-4}$$

y

$$\frac{\partial U_1/\partial q_{11}}{\partial U_1/\partial q_{12}} = \frac{\partial U_2/\partial q_{11}}{\partial U_2/\partial q_{12}}\tag{7-5}$$

El lado izquierdo de (7-5), es la *RSB* del consumidor I, y el lado derecho, la del II. Si (7-5) no se cumpliese, podría aumentarse la satisfacción de I, sin disminuir la de II. La igualdad de las *RSB*, resultante de la competencia perfecta, asegura que la distribución de los bienes (incluyendo el ocio), entre los consumidores, satisface las condiciones de un óptimo de Pareto. El análisis matemático del caso de dos consumidores, se generaliza fácilmente a cualquier número de ellos.

La argumentación puede ilustrarse con la ayuda de la caja de Edgeworth. Los lados del rectángulo de la figura 7-1, representan las cantidades disponibles totales de Q_1 y Q_2, en una economía de trueque. Cualquier punto de la caja representa una distribución particular de los artículos entre los dos consumidores. Por ejemplo, si la distribución de artículos viene dada por el punto *A*, las cantidades de Q_1 y Q_2 consumidas por I se miden por las coordenadas de *A*, usando el ángulo sudoeste *O* como origen; las cantidades consumidas por II, se miden por las coordenadas del punto *A*, usando como origen el ángulo nordeste *O'*. El mapa de indiferencia de I se dibuja usando *O* como origen, y el de II, utilizando *O'*. Las *RSB* de los dos consumidores se igualan en el punto en que una curva de indiferencia de I es tangente a una de II. El lugar lo Q. Maximicemos el output del empresario I, sujeto a la condición de que el output de II esté al nivel predeterminado, q_2^0. Formemos la función

$$L = f_1(x_{11}, x_{12}) + \lambda\,[f_2(x_1^0 - x_{11}, x_2^0 - x_{12}) - q_2^0]$$

e igualemos a cero las derivadas parciales:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{11}} = \frac{\partial f_1}{\partial x_{11}} - \lambda\,\frac{\partial f_2}{\partial x_{11}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{12}} = \frac{\partial f_1}{\partial x_{12}} - \lambda\,\frac{\partial f_2}{\partial x_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = f_2(x_1^0 - x_{11}, x_2^0 - x_{12}) - q_2^0 = 0$$

y

$$\frac{\partial f_1/\partial x_{11}}{\partial f_1/\partial x_{12}} = \frac{\partial f_2/\partial x_{11}}{\partial f_2/\partial x_{12}} \qquad (7\text{-}9)$$

que prueba que para que se dé el óptimo de Pareto, es necesaria la igualdad de las *RTS*.

El óptimo general de Pareto. — La eficiencia de los sectores de consumo y producción implica que la distribución de los recursos es óptima en el sentido paretiano en toda la economía. Consideremos las *RSB* entre Q_k y Q_j de los consumidores. Todas las *RSB* son iguales a p_j y p_k. La razón de precios es también igual a todas las *RTP* entre Q_k y Q_j de los productores. Por tanto, $RSB = RTP$ para todos los consumidores, empresas, y artículos. Parecidas condiciones pueden conducirse si j o k, o ambas a la vez, se refieren a factores primarios; la *RSB*, de los consumidores, entre un factor que ellos retengan y un bien que consuman, debe igualar (por un razonamiento análogo), la correspondiente relación de *transformación del factor en el producto*, de los productores (*PMa*). La igualdad de las diversas razones de sustitución y transformación, garantiza la vigencia del óptimo de Pareto en toda la economía. Por ejemplo: supongamos que $RSB = 1/3$ y $RTP = 2/3$. Moviéndonos a lo largo de la función de transformación del productor, se pueden transformar tres unidades de Q_j en dos de Q_k. Para permanecer en la misma curva de indiferencia y evitar disminuciones de utilidad, un consumidor que cediera tres unidades de Q_j (las posiciones de los otros consumidores inmutables) requeriría solamente una unidad de Q_k. Por consiguiente, en estas condiciones, el nivel de satisfacción del consumidor podría incrementarse realizando la transformación tecnológica de tres unidades de Q_k en dos de Q_j. Mejora que no es factible si *RSB* y *RTS* son iguales

La optimidad paretiana de la competencia perfecta, puede deducirse directamente de la argumentación que sigue: si existe competencia perfecta entre los consumidores la *RSB* entre cada dos artículos Q_k y Q_j, se iguala a la razón de sus precios:

$$RSB = \frac{p_j}{p_k}$$

Si existe competencia perfecta entre los empresarios en los mercados de bienes y factores

$$p_j = \frac{r}{PMa_j} \qquad p_k = \frac{r}{PMa_k} \tag{7-10}$$

donde r es el precio del factor X y PMa_j y PMa_k son sus productividades marginales respectivas en la producción de Q_j y Q_k. Por tanto:

$$RSB = \frac{p_j}{p_k} = \frac{r/PMa_j}{r/PMa_k} = \frac{1/PMa_j}{1/PMa_k}$$

$$= \frac{\text{Coste marginal de } Q_j \text{ en términos de } X}{\text{Coste marginal de } Q_k \text{ en términos de } X} = RTP \tag{7-11}$$

que prueba el óptimo de Pareto.
Provisto que

$$\frac{p_j}{p_k} = \frac{r/PMa_j}{r/PMa_k} \tag{7-12}$$

se pondría de manifiesto que la ecuación (7-11) se cumple aunque no lo haga la (7-10).

Pero (7-12) en ausencia de (7-10), sólo se cumple si

$$p_j = k\,\frac{r}{PMa_j} \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{7-13}$$

donde $k \neq 1$ es un factor de proporcionalidad, o sea si los precios son proporcionales al coste marginal ($= r/PMa$). La ecuación (7-13) se convierte en

$$\frac{r}{p_j} = \frac{1}{k}\,PMa_j \tag{7-14}$$

El lado izquierdo de (7-14) es igual a la relación de sustitución entre Q_j y X de los consumidores; el lado derecho es $(1/k)$ veces la relación de transformación entre Q_j y X de los productores. Por lo tanto, las correspondientes relaciones de sustitución y transformación de consumidores y productores no son iguales. Los consumidores no proporcionan la cantidad óptima de X (trabajo), y la asignación no puede ser óptima en el sentido de Pareto.[6] Supongamos, por ejemplo, que el precio es tres veces el *CMa*, o sea $k = 3$. Sea la *RSB* entre el trabajo y el artículo Q igual a 2 y la *PMa* del trabajo, 6. Un consumidor estaría dispuesto a suprimir una hora adicional de ocio (trabajar una hora adicional), si recibiese dos unidades más de Q. Pero la aplicación de una hora adicional de trabajo daría lugar a la producción de 6 unidades más de Q. Tal situación no es un óptimo paretiano.

La competencia perfecta representa un óptimo de bienestar en el sentido restringido de que satisface las exigencias de optimalidad de Pareto. La optimalidad paretiana es contingente de la verificación del supuesto de que se cumplan todas las condiciones de segundo grado. Si se incumpliese alguna (o sea: si las funciones de transformación fuesen convexas, o las curvas de indiferencia e iso-cuantas cóncavas respecto del origen), la igualdad de las relaciones relevantes de sustitución o transformación no garantizaría el óptimo. De hecho, el punto en el que se igualan las relaciones de sustitución y transformación, puede ser un "pésimo" y no un óptimo. El óptimo viene dado, entonces, por una solución extrema (véase Sección 2-2).

Siempre que las *RSB* sean mayores (o más pequeñas) que las correspondientes *RTP*, en cualquier punto de la curva de transformación, pueden darse soluciones extremas; ello, incluso si las curvas de indiferencia son convexas y las de transformación cóncavas hacia el origen. En tales casos, los óptimos de bienestar deben describirse en términos de desigualdades marginales.

El hecho de que el análisis de la optimalidad de Pareto acepte la distribución de renta vigente, o sea la *dotación existente de factores*, introduce una dificultad más. En efecto, no considera el problema de determinar la óptima distribución de la renta. Por tanto, resulta concebible que el funcionamiento de la competencia perfecta conduzca a una situación en la que la mayor parte de los individuos vivan por debajo o a la par del nivel de subsistencia. En el punto B, de la figura 7-1, el consumidor I disfruta de una alta renta pero el consumidor II no. Y como el punto B está en la curva de contrato, no se puede mejorar la posición de un consumidor sin empeorar la del otro. Es un *punto eficiente* y no

6. Puesto que r/PMa es el coste marginal del output (CMa), (7-2) puede formularse como

$$\frac{p_j}{p_k} = \frac{CMa_j}{CMa_k}$$

La prueba anterior implica también que, para un óptimo, $p = CMa$ para cada artículo; la proporcionalidad de precios y costes marginales no es suficiente.

puede decirse que sea inferior a cualquier otro punto, como ocurría con el A. El análisis de bienestar en términos del óptimo de Pareto, da una solución considerablemente indeterminada: en la figura 7-1, existe un número infinito de puntos, que son óptimos de Pareto. La aceptación de la curva de contrato como respresentación de óptimos de bienestar, es ya de por sí un juicio de valor. Para juzgar la relativa deseabilidad social de puntos alternativos de la curva de contrato, la sociedad debe hacer adicionales juicios de valor que establezcan sus preferencias entre las distintas formas alternativas de distribuir la satisfacción entre los individuos. Los juicios de valor son creencias éticas, y no son objeto del análisis económico. Se aceptan como dados y se incorporan a continuación al análisis económico. La indeterminación que resulta del análisis paretiano es la consecuencia de considerar que un aumento de bienestar sólo queda claramente definido si una mejora en la posición de un individuo no va acompañada por una pérdida en la de otro. La indeterminación únicamente desaparece mediante la introducción de ulteriores juicios de valor.

7-2. La eficiencia de la competencia monopolística

En un mundo caracterizado por la competencia monopolística, no pueden cumplirse las condiciones de la optimalidad paretiana. Los criterios de eficiencia de la Sección 7-1, no se cumplen en presencia de monopolios, oligopolios, monopsonios, etc. En la sección 7-1, se demostró que la competencia perfecta conduce a una eficiente asignación de recursos. En la presente, se mostrará que una asignación eficiente de los recursos, tiene que ser perfectamente competitiva. La argumentación será paralela a la desarrollada en la Sección 7-1.

El sector de consumo. — Supongamos que los consumidores no están en competencia perfecta en los mercados de bienes y factores. Hay uno o varios consumidores que no pueden adquirir la cantidad de artículos que quisieran, o vender la cantidad deseada de factores, sin alterar su precio notablemente. Supongamos que uno de los consumidores tiene que pagar un precio cada vez más alto a medida que aumenta sus compras.

Supongamos igualmente que existen dos consumidores cuyas respectivas funciones de utilidad son:

$$U_1 = U_1\,(q_{11}, q_{12}) \qquad U_2 = U_2\,(q_{21}, q_{22}) \tag{7-15}$$

donde q_{ij} es la cantidad del bien j^o consumida por el consumidor i^o. Sea el precio de cada bien dependiente de la cantidad demandada total:

$$p_1 = g\,(q_{11} + q_{21}) \qquad p_2 = h\,(q_{12} + q_{22}) \tag{7-16}$$

Las ecuaciones de balance de los dos consumidores, son:

$$\begin{aligned} y_1^0 - g\,(q_{11} + q_{21})\,q_{11} - h\,(q_{12} + q_{22})\,q_{12} = 0 \\ y_2^0 - g\,(q_{11} + q_{21})\,q_{21} - h\,(q_{12} + q_{22})\,q_{22} = 0 \end{aligned} \tag{7-17}$$

Cada uno de ellos maximiza su índice de utilidad condicionado a su ecuación de balance. Formemos las funciones

$$\begin{aligned} U_1^* &= U_1\,(q_{11}, q_{12}) + \lambda[y_1^0 - g\,(q_{11} + q_{21})\,q_{11} - h\,(q_{12} + q_{22})\,q_{12}\,] \\ U_2^* &= U_2\,(q_{21}, q_{22}) + \mu[y_2 - g\,(q_{11} + q_{21})\,q_{21} - h\,(q_{12} + q_{22})\,q_{22}] \end{aligned}$$

e igualemos a cero las derivadas parciales apropiadas:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U_1}{\partial q_{11}} - \lambda\,[g + q_{11}\,g'] = 0 \qquad \frac{\partial U_1}{\partial q_{12}} - \lambda\,[h + q_{12}\,h'] = 0 \\ &\frac{\partial U_2}{\partial q_{21}} - \mu\,[g + q_{21}\,g'] = 0 \qquad \frac{\partial U_2}{\partial q_{22}} - \mu\,[h + q_{22}\,h'] = 0 \end{aligned} \tag{7-18}$$

y

$$\frac{\partial U_1/\partial q_{11}}{\partial U_1/\partial q_{12}} = \frac{g + q_{11}g'}{h + q_{12}h'} \tag{7-19}$$

$$\frac{\partial U_2/\partial q_{21}}{\partial U_2/\partial q_{22}} = \frac{g + q_{21}g'}{h + q_{22}h'} \tag{7-20}$$

El consumidor individual está en equilibrio si su *RSB* es igual a la razón de los costes marginales de adquisición de cantidades adicionales de Q_1 y Q_2.[7] Bajo los actuales supuestos, los costes marginales no serán iguales a los precios de los artículos, y los sobrepasarán si g' y h' son positivos (véase 6-4). En general, los lados derechos de (7-19) y (7-20), así como las *RSB* correspondientes, no serán iguales.[8] Se puede concluir, que en ausencia de competencia perfecta entre los consumidores, la distribución de los bienes de consumo no será, generalmente, óptima en el sentido de Pareto.

El sector productivo. — La imposibilidad de establecer la optimalidad paretiana en el sector productivo, puede ser resultado de la exis-

7. De nuevo se supone que se cumplen las condiciones de segundo grado.
8. Si $q_{11} = q_{21}$ y $q_{12} = q_{22}$ las *RSB* serán iguales. Sin embargo, aunque las *RSB* sean iguales, el sistema, en conjunto, no alcanzará el óptimo de Pareto.

tencia de competencia monopolística en los mercados de productos o de inputs. Por simple extensión de las secciones 3-2, 3-5, y 6-4, puede demostrarse la imposibilidad de alcanzar el óptimo de Pareto.

Si existe competencia monopolística en los mercados de inputs, el precio de cada uno de ellos es función creciente (o decreciente) de la cantidad comprada. En tal mercado es fácilmente observable que la *RTS* de cada empresario debe igualar la razón de los costes marginales de adquisición de unidades adicionales de inputs, no la razón de sus precios. Generalmente, estas razones diferirán de empresario a empresario, y sus respectivas *RTS* no serán iguales. La producción total del artículo en cuestión, no es óptima en el sentido de Pareto porque la divergencia entre las *RTS* de los empresarios individuales implica que no se encuentran sobre la curva de contrato: mediante una adecuada redistribución de inputs entre los empresarios, sería posible aumentar los niveles de output de algunos sin disminuir los de los otros.[9].

Si existe competencia perfecta en los mercados de inputs, pero competencia monopolística en los de productos, la *PMa* de *X* en la producción de *Q*, multiplicada por el ingreso marginal (*IMa*) de *Q*, debe igualar el precio de *X*. La relación de transformación de productos entre dos bienes dados, no será necesariamente la misma para todos los productores, y la producción de bienes no constituirá un óptimo de Pareto: en efecto, podría encontrarse una redistribución de inputs que aumentara el nivel de output de un artículo sin disminuir el del otro.

La ausencia del óptimo de Pareto en general. — Cualquier elemento de competencia monopolística impide una distribución de recursos que sea óptima en el sentido de Pareto. La afirmación previa se prueba mediante un razonamiento dividido en cuatro etapas:

1.° En condiciones de competencia monopolística entre consumidores, las *RSB* correspondientes a distintos consumidores, no son iguales necesariamente.

2.° En mercados de inputs, y en condiciones de competencia monopolística entre empresas, las *RTS* correspondientes a diversas empresas, no son iguales necesariamente.

9. La argumentación se puede expresar alternativamente del modo siguiente: Si los mercados de los inputs son de competencia monopolística, la *PMa* de *X* en la producción de *Q* debe ser igual a (el coste marginal de alquilar una unidad adicional de *X*)/*p*, y no es necesario que las *RTS* sean las mismas para todas las empresas. Sean PMa_x y PMa_y las productividades marginales de los inputs *X* e *Y* en la producción de *Q*, y supongamos que, en la empresa I, $PMa_x/PMa_y = {}^{10}/_{5}$, y en la empresa II, $PMa_x/Pma_y = {}^{2}/_{3}$. Si se transfiere una unidad de *X* de II a I, y una unidad de I a II, los niveles de output de ambas empresas aumentarán en una unidad.

3.º En mercados de productos, y en condiciones de competencia monopolística entre empresas, las *RTP* correspondientes a distintas empresas, no son iguales necesariamente.

4.º Supongamos que no se cumplan 1 y 2, o sea que la competencia *monopolística solamente existe entre las empresas* de los mercados de productos. Además, supongamos, que las *RTP* correspondientes a distintas empresas, *son*, por casualidad, iguales; entonces

$$RTP = \frac{1/PMa_j}{1/PMa_k} = \frac{r/PMa_j}{r/PMa_k} = \frac{IMa_j}{IMa_k} \tag{7-21}$$

$RTP = RSB$ es condición necesaria, pero no suficiente del óptimo de Pareto. La condición necesaria se cumple si, y sólo si

$$\frac{IMa_j}{IMa_k} = \frac{p_j}{p_k}$$

o sea si la elasticidad de la demanda de Q_j es igual a la de Q_k, puesto que $IMa = p[1 - (1/e)]$. La insuficiencia de esta condición se prueba suponiendo que $RSB = RTP$ para cada par de artículos, y mostrando que la distribución de los recursos no puede ser óptima en sentido de Pareto. La ecuación (7-21), sólo se cumplirá si

$$\frac{r/PMa_j}{r/PMa_k} = \frac{p_j}{p_k} \tag{7-22}$$

La existencia de competencia monopolística, implica que solamente son iguales las razones, pero no los numeradores (o denominadores), tomados de par en par. Se mostró [ecuaciones (7-12) y (7-14)], que, entonces, las razones de sustitución del consumidor entre artículos y factores primarios no se igualaban a las *PMa* correspondientes (la relación de transformación de trabajo en output de los productores), por tanto, la asignación general de recursos, no es óptima en el sentido de Pareto.

En la Sección 7-1, se probó que la competencia *perfecta da lugar a* una distribución óptima en el sentido de Pareto. Ahora, puede añadirse la conclusión, aún más fuerte, de que cada distribución, óptima en el sentido paretiano, sólo puede alcanzarse en condiciones de competencia perfecta, puesto que no puede alcanzarse en situaciones de competencia monopolística; por tanto, para su asignación eficiente es condición necesaria y suficiente, que todos los mercados sean perfectamente competitivos. Eso es evidente si se tiene en cuenta que en ausencia de competencia perfecta, el precio excede el *CMa*. El *CMa* es una medida del coste social de la utilización de recursos para la producción de una unidad adicional del artículo Q; su precio es una medida del beneficio social derivado de la de producción de una unidad adicional de Q. El beneficio social neto puede aumentar mientras $p > CMa$, y la competencia imperfecta viola los criterios de eficiencia al no producir cantidades de artículos suficientemente grandes.

7-3. Efectos externos en el consumo y la producción

Las conclusiones del análisis precedente, no son válidas universalmente; dependen del supuesto de que no haya efectos externos en el consumo y la producción, o sea: de que el nivel de utilidad de un consumidor no dependa de los niveles de consumo de los demás, y de que el coste total de un empresario no dependa de los niveles de output de los demás. Si existen efectos externos en el consumo y la producción, el óptimo de Pareto no puede alcanzarse en condiciones de competencia perfecta.

FUNCIONES DE UTILIDAD INTERDEPENDIENTES. — Supongamos que el nivel de utilidad de un consumidor, depende del consumo de otro. Un altruismo extremo puede aumentar la satisfacción del consumidor i^o cuando se eleve el nivel de consumo del consumidor j^o. El deseo de "Keep up with the Joneses", puede tener el efecto opuesto.

Supongamos que hay dos consumidores con funciones de utilidad:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1(q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}) \\ U_2 &= U_2(q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}) \end{aligned} \tag{7-23}$$

donde $q_{11} + q_{21} = q_1^0$, $q_{12} + q_{22} = q_2^0$. Para maximizar la utilidad de I sujeta a la condición de que la utilidad de II tiene un nivel predeterminado $U_2^0 =$ constante, formemos la función

$$\begin{aligned} U_1^* = U_1(q_{11}, q_{12}, q_1^0 - q_{11}, q_2^0 - q_{12}) \\ + \lambda\,[U_2(q_{11}, q_{12}, q_1^0 - q_{11}, q_2^0 - q_{12}) - U_2^0] \end{aligned}$$

Igualemos a cero las derivadas parciales.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1^*}{\partial q_{11}} &= \frac{\partial U_1}{\partial q_{11}} - \frac{\partial U_1}{\partial q_{21}} + \lambda\left[\frac{\partial U_2}{\partial q_{11}} - \frac{\partial U_2}{\partial q_{21}}\right] = 0 \\ \frac{\partial U_1^*}{\partial q_{12}} &= \frac{\partial U_1}{\partial q_{12}} - \frac{\partial U_1}{\partial q_{22}} + \lambda\left[\frac{\partial U_2}{\partial q_{12}} - \frac{\partial U_2}{\partial q_{22}}\right] = 0 \end{aligned} \tag{7-24}$$

$$\frac{\partial U_1^*}{\partial \lambda} = U_2(q_{11}, q_{12}, q_1^0 - q_{11}, q_2^0 - q_{12}) - U_2^0 = 0$$

y

$$\frac{\partial U_1/\partial q_{11} - \partial U_1/\partial q_{21}}{\partial U_1/\partial q_{21} - \partial U_1/\partial q_{22}} = \frac{\partial U_2/\partial q_{11} - \partial U_2/\partial q_{21}}{\partial U_2/\partial q_{12} - \partial U_2/\partial q_{22}} \tag{7-25}$$

La ecuación (7-25) es la condición necesaria para el óptimo de Pareto. Generalmente defiere de (7-3) [o de (7-5)], que establece que la *RSB* de I debe ser igual a la de II. La competencia perfecta da lugar a la consecución de (7-3), pero no de (7-25), puesto que *las derivadas parciales* de las funciones de utilidad son funciones de todas las variables, la posición óptima de cada consumidor depende del nivel de consumo del otro. Por ejemplo, supongamos que el único efecto externo que ocurre en el sistema de dos consumidores, es $\partial U_2/\partial q_{11} < 0$. La ecuación (7-25) se convierte en

$$\frac{\partial U_1/\partial q_{11}}{\partial U_1/\partial q_{12}} = \frac{\partial U_2/\partial q_{11} - \partial U_2/\partial q_{21}}{-\partial U_2/\partial q_{22}} \tag{7-26}$$

En una distribución óptima, la *RSB* del consumidor II debe ser más pequeña, de lo que sería en ausencia de efectos externos.

Gráficamente puede demostrarse que en presencia de efectos externos la condición (7-3) no tiene por qué garantizar necesariamente la consecución de un óptimo de Pareto. Las figuras 7-2*a* y 7-2*b*, representan respectivamente los mapas de indiferencia de los consumidores I y II. Supongamos que, en la situación inicial, I consume el lote de artícu-

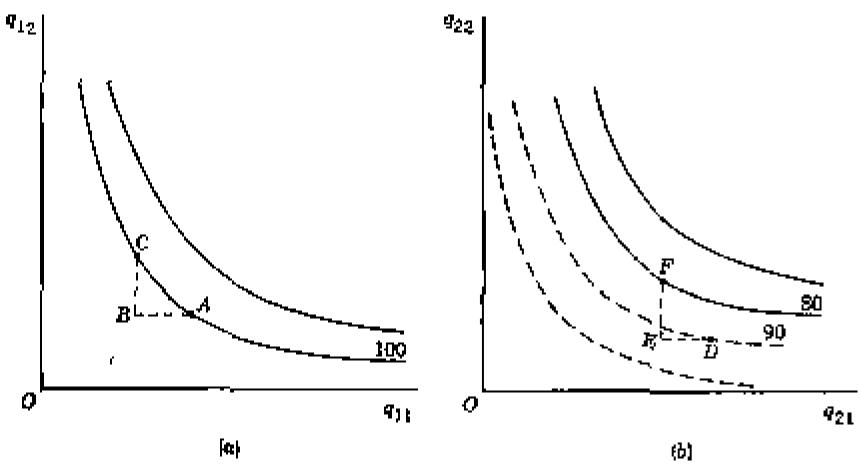


FIGURA 7-2

los representado por A, y II el representado por F. Estos puntos, en los que las RSB son iguales, se alcanzan por la maximización de la utilidad llevada a cabo individualmente por cada uno de los dos consumidores, independientemente de posibles efectos externos. Supongamos que I no se ve afectado por el consumo de II, y que el nivel de utilidad de II se reduce por el consumo de Q_1 (pero no por el de Q_2) de I. El mapa de indiferencia de II (curvas continuas), está construido bajo el supuesto de que el consumo de I viene dado por A. En sus posiciones de equilibrio individual, el índice de utilidad de I, es 100, y el de II, 80. Supóngase que la autoridad pertinente altera la distribución de artículos, de forma tal que las cantidades consumidas totales permanecen inalteradas, y que I pasa a C y II a D. La redistribución no ha cambiado el nivel de utilidad del consumidor I. Sin embargo, la disminución de su consumo de Q_1, cambia el nivel de utilidad de cada combinación de artículos que consume II: después del cambio del consumo de I, las curvas de indiferencia relevantes de II son las indicadas por las curvas punteadas de la figura 7-2*b*. Puesto que su nueva posición es la D, el nivel de utilidad de II ha aumentado hasta 90. Puede, por ello, concluirse que se puede aumentar el nivel de utilidad de II sin disminuir el de I; de aquí, que la igualdad de las RSB no garantice la consecución de un óptimo de Pareto.

Economías y deseconomías externas. — Se demostró que para alcanzar un óptimo de Pareto, en el sector productivo, es necesario que se cumpla el criterio, $p = CMa$. La igualdad de precio y coste marginal de todos los artículos y empresas, implica que las RTP, correspondientes a distintas empresas, son iguales. La RTP (la pendiente de la curva de transformación), mide el coste de oportunidad o sacrificio real, en términos de las oportunidades perdidas, de producir una unidad adicional de un artículo. Hasta ahora este coste de oportunidad se ha considerado como interno a la empresa: para producir una unidad adicional de Q_j, es preciso sacrificar la producción de cierto número de unidades de Q_k. Desde el punto de vista de la sociedad, la medida apropiada del sacrificio, es el número de unidades de Q_k a que tiene la sociedad que renunciar para producir una unidad adicional de Q_j. En ausencia de economías y deseconomías externas, el coste de oportunidad es el mismo desde cualquier punto de vista, privado o social. Pero si se producen efectos externos en la esfera productiva, debe tenerse en consideración la interdependencia entre los costes de la empresa i^a y el output de la h^a (véase Sección 4-3).

En aras de la simplicidad, supongamos que existen solamente dos empresas con las siguientes funciones de coste:

$$C_1 = C_1(q_1, q_2) \qquad C_2 = C_2(q_1, q_2) \tag{7-27}$$

donde q_1 y q_2, son los niveles de output. Las funciones de coste (7-27), expresan la existencia de efectos externos. Si cada empresa maximiza *individualmente su beneficio, el precio será* igual al *CMa* o

$$p = \frac{\partial C_1}{\partial q_1} \qquad p = \frac{\partial C_2}{\partial q_2} \tag{7-28}$$

El beneficio de cada empresa depende del nivel del output de la otra, pero ninguna de ellas puede influir sobre el nivel de output de la otra, de forma que así cada una maximiza su beneficio respecto a la variable que está bajo su control.

El bienestar asociado a la producción, puede medirse por la diferencia entre el beneficio social creado y el coste social incurrido. El beneficio social derivado de la producción de $q_1 + q_2$ unidades del artículo, se mide por el ingreso total $p(q_1 + q_2)$, o sea por la cantidad que los consumidores desean *pagar por el output. Los costes sociales por* la suma de los costes en que han incurrido ambos empresarios al producir el artículo, $C_1(q_1, q_2) + C_2(q_1, q_2)$. Para maximizar el bienestar, hay que *maximizar el beneficio conjunto* de los empresarios:

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 = p(q_1 + q_2) - C_1(q_1, q_2) - C_2(q_1, q_2) \tag{7-29}$$

Igualando a cero las derivadas parciales,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial q_1} &= p - \frac{\partial C_1}{\partial q_1} - \frac{\partial C_2}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial q_2} &= p - \frac{\partial C_1}{\partial q_2} - \frac{\partial C_2}{\partial q_2} = 0 \end{aligned} \tag{7-30}$$

Las condiciones de segundo grado requieren que los menores principales del Hessiano relevante

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial^2 C_1}{\partial q_1^2} - \dfrac{\partial^2 C_2}{\partial q_1^2} & -\dfrac{\partial^2 C_1}{\partial q_1 \partial q_2} - \dfrac{\partial^2 C_2}{\partial q_1 \partial q_2} \\ -\dfrac{\partial^2 C_1}{\partial q_1 \partial q_2} - \dfrac{\partial^2 C_2}{\partial q_1 \partial q_2} & -\dfrac{\partial^2 C_1}{\partial q_2^2} - \dfrac{\partial^2 C_2}{\partial q_2^2} \end{vmatrix}$$

alternen de signo, o que

$$-\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_1^2} < 0 \tag{7-31}$$

y
$$\left(-\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_1^2}\right)\left(-\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_1\, \partial q_2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_1\, \partial q_2}\right)^2 > 0 \tag{7-32}$$

Conjuntamente las dos desigualdades (7-31) y (7-32) implican que

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_1^2} > 0 \qquad \frac{\partial^2 C_1}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial q_2^2} > 0 \tag{7-33}$$

Las derivadas parciales $\partial C_1/\partial q_1$ y $\partial C_2/\partial q_2$ son los costes marginales *privados,* porque miden el tipo del aumento del coste total de un empresario individual cuando se eleva su nivel de output. La maximización individual, requiere que el precio se iguale al coste marginal privado y que este último sea creciente. Las sumas $\partial C_1/\partial q_1 + \partial C_2/\partial q_1$ y $\partial C_1/\partial q_2 + \partial C_2/\partial q_2$ son costes marginales *sociales* porque miden el tipo de incremento de los costes de la industria a medida que aumenta el nivel de output de una empresa particular. La maximización del bienestar requiere que el precio iguale el *coste marginal social* de cada empresario y que *el coste marginal social sea creciente.* La igualdad entre precio y coste marginal social garantiza que las *RSB* de los consumidores no igualarán las *RTP* de las empresas individuales sino la *RTP* de la sociedad, puesto que la razón de los costes marginales sociales mide, desde el punto de vista de la sociedad, las otras alternativas de producción desaprovechadas por producir una unidad adicional de un artículo.

Supongamos que la empresa I experimenta economías externas y la II, deseconomías externas. Entonces $\partial C_1/\partial q_2 < 0$ y $\partial C_2/\partial q_1 > 0$. Como resultado, $\partial C_1/\partial q_1 + \partial C_2/\partial q_1$ de (7-30) es igual al precio, sólo si $\partial C_1/\partial q_1$ tiene un valor inferior al que tendría bajo las condiciones de la maximización individual del beneficio. La existencia de *CMa* crecientes significa que la empresa, que es causa de las deseconomías externas, produciría un nivel de output más bajo si se tratara de maximizar el bienestar que cuando siguiera el principio de la maximización individual. Por razonamiento análogo, la empresa que es causa de economías externas, generalmente produciría un output mayor. Resultado éste que puede obtenerse mediante una imposición y ayuda de subsidios apropiados sobre los niveles de output de las empresas respectivas.

Supongamos que las funciones de coste de las dos empresas son,

$$C_1 = 0{,}1\, q_1^2 + 5\, q_1 - 0{,}1\, q_2^2 \qquad C_2 = 0{,}2\, q_2^2 + 7\, q_2 + 0{,}025 q_1^2$$

La empresa I experimenta economías externas y da lugar a diseconomías externas; empresa II lo contrario. Suponiendo que el precio son 15 dólares, e igualándolo al *CMa* de ambas empresas, resulta,

$$\begin{array}{lll} 15 = 0{,}2\, q_1 + 5 & q_1 = 50 & \pi_1 = 290 \\ 15 = 0{,}4\, q_2 + 7 & q_2 = 20 & \pi_2 = 17{,}5 \end{array}$$

Con objeto de maximizar el bienestar, formemos la función de beneficio conjunto

$$\pi = 15\,(q_1 + q_2) - 0{,}125\, q_1^2 - 5\, q_1 - 0{,}1\, q_2^2 - 7\, q_2$$

e igualemos a cero las derivadas parciales:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 15 - 0{,}25\, q_1 - 5 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 15 - 0{,}20\, q_2 - 7 = 0$$

De aquí que $q_1 = 40$, $q_2 = 40$ y $\pi = 360$. Podrá observar el lector que se satisfacen las condiciones de segundo grado. Igualmente, los beneficios totales son mayores en la maximización de bienestar que en la individual

$$290 + 17{,}5 = 307{,}5 < 360$$

La maximización individual no garantiza la consecución del óptimo de Pareto, puesto que éste requiere que la *RSB* iguale la razón a la que la sociedad puede transformar un artículo en otro. En ausencia de efectos externos, las relaciones privadas y sociales de transformación de productos son idénticas. En presencia de economías o diseconomías externas la maximización individual conduce a la satisfacción de las condiciones marginales, socialmente inapropiadas o "erróneas". Desde luego, el beneficio agregado *tiene* que redistribuirse entre las empresas individuales. Sin esta redistribución algunas de ellas experimentarían una disminución en sus beneficios, y la posición resultante no podría calificarse de socialmente preferible. En el ejemplo presente, como resultado de la maximización de bienestar la empresa I consigue 400 dólares y la II 40. Cualquier cantidad mayor que 57,5, pero menor que 110, dólares, que se redistribuyese de la empresa I a la II dejaría a cada una de ellas en mejor posición que bajo la maximización individual.

Mediante las apropiadas imposición y concesión de créditos, es preferible forzar a los empresarios que operan maximizando individualmente sus beneficios a la producción del nivel de output total, que se produciría en condiciones de maximización conjunta del beneficio. De las funciones de oferta y demanda es posible calcular la magnitud de imposición requerida. Sea $D = D(p)$ la función de demanda total y la función de oferta total, en condiciones de maximización individual de beneficio, $S = \sum S_i(p)$, y la función de oferta, bajo el supuesto de maximización conjunta del beneficio, $S^* = \sum S_i^*(p)$. La igualdad $S^* = D$ determina un precio p^* y la cantidad vendida, $S_i^*\ (p^*)$. Para alcanzar el precio y las cantidades anteriores en condiciones de maximización indivual de beneficio, deben cargarse los impuestos (o subsidios) unitarios t_i, para las que

$$S_i\ (p^* - t_i) = S_i^*\ (p^*)$$

Hallando el valor de las t_i se puede determinar la magnitud de la imposición:

$$t_i = h_i\ (p^*)$$

Finalmente, de lo anterior se sigue que los beneficios de, al menos, un empresario pueden incrementarse, sin que se reduzcan los de los demás, si se redistribuye apropiadamente entre los empresarios, en pagos de cuantía fija, la suma recaudada de impuestos.

7-4. Funciones de bienestar social

Con la introducción de una función de bienestar social puede destruirse la indeterminación que, en última instancia resta, si el requisito que se exige para la optimización del bienestar es el criterio de optimalidad de Pareto. La función de bienestar social es un índice ordinal del bienestar de la sociedad y función de los niveles de utilidad de todos los individuos. No es única y su forma depende de los juicios de valor de la persona para la que es una función de bienestar deseable. En ciertos casos puede resultar imposible el ponerse de acuerdo sobre la forma aceptable de la función de bienestar social; en tales casos puede suceder que haya que imponerla de forma dictatorial. En cualquier caso, su forma depende de los juicios de valor de sus promulgadores, puesto que expresa sus opiniones sobre el efecto que el nivel de utilidad del individuo i^o tiene sobre el bienestar social. Aún más, la aceptación, por un individuo, de la función de bienestar social con el propósito de resolver el problema de la distribución envuelve también un juicio de valor. La forma general de la función de bienestar social es

$$W = W(U_1, U_2, \ldots, U_n) \tag{7-34}$$

donde U_i es el nivel del índice de utilidad del individuo i^o.

Determinación del óptimo de bienestar. — Supongamos que la sociedad consiste de dos individuos cuyas funciones de utilidad son

$$U_1 = U_1(q_{11}, q_{12}, x_1) \qquad U_2 = U_2(q_{21}, q_{22}, x_2) \tag{7-35}$$

donde q_{ij} es la cantidad del artículo j^o consumido por el individuo i^o, y x_i la cantidad de trabajo llevada a cabo por este mismo individuo.

La función de producción total de la sociedad, establece las cantidades totales que se pueden producir de cada artículo en función de la cantidad total de trabajo y puede formularse como función implícita:

$$F(q_{11} + q_{21}, q_{12} + q_{22}, x_1 - x_2) = 0 \tag{7-36}$$

Supongamos, finalmente, que la función de bienestar social es

$$W = W(U_1, U_2) \tag{7-37}$$

El objetivo de la sociedad es maximizar (7-37) sujeta a la condición dada por (7-36). Formemos la función

$$W^* = W[U_1(q_{11}, q_{12}, x_1), U_2(q_{21}, q_{22}, x_2)] + \lambda F(q_{11} + q_{21}, q_{12} + q_{22}, x_1 + x_2)$$

e igualemos a cero sus derivadas parciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W^*}{\partial q_{11}} &= W_1 \frac{\partial U_1}{\partial q_{11}} + \lambda F_1 = 0\\
\frac{\partial W^*}{\partial q_{12}} &= W_1 \frac{\partial U_1}{\partial q_{12}} + \lambda F_2 = 0\\
\frac{\partial W^*}{\partial x_1} &= W_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \lambda F_3 = 0\\
\frac{\partial W^*}{\partial q_{21}} &= W_2 \frac{\partial U_2}{\partial q_{21}} + \lambda F_1 = 0\\
\frac{\partial W^*}{\partial q_{22}} &= W_2 \frac{\partial U_2}{\partial q_{22}} + \lambda F_2 = 0\\
\frac{\partial W^*}{\partial x_2} &= W_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \lambda F_3 = 0\\
\frac{\partial W^*}{\partial \lambda} &= F(q_{11} + q_{21}, q_{12} + q_{22}, x_1 + x_2) = 0
\end{aligned} \tag{7-38}$$

El sistema de ecuaciones (7-38) tiene 7 ecuaciones con 7 variables y, generalmente, puede resolverse para los valores de las incógnitas (véase Sección A-3 y 5-5). Como resultado de la introducción de juicios distributivos de valor en la forma de la función de bienestar social, el óptimo de bienestar queda completamente determinado.[10] Rápidamente puede comprobarse que la distribución resultante es un óptimo de Pareto. Traslademos a la derecha los segundos términos de las 6 primeras ecuaciones de (7-38) y dividamos entonces la primera ecuación por la segunda y la tercera por la cuarta y quinta respectivamente:

$$\frac{\partial U_1/\partial q_{11}}{\partial U_1/\partial q_{12}} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{\partial U_2/\partial q_{21}}{\partial U_2/\partial q_{22}} \qquad \frac{\partial U_1/\partial q_{11}}{\partial U_1/\partial x_1} = -\frac{F_1}{F_3} = \frac{\partial U_2/\partial q_{21}}{\partial U_2/\partial x_2} \tag{7-39}$$

Las relaciones de sustitución entre bienes son las mismas para todos los consumidores y son también iguales a las correspondientes relaciones de transformación de productos. Aún más, la proporción según la que los consumidores sustituyen trabajo (o su contrapartida, el ocio) por bienes, es igual a la productividad marginal del trabajo. Lo que prueba el óptimo de Pareto si al mismo tiempo se cumplen las condiciones de segundo grado.[11]

PREFERENCIA E INDIFERENCIA SOCIALES. —Los economistas han intentado desarrollar criterios que permitan juzgar si un cambio dado, en la economía, es socialmente preferible al estado de ésta, existente. Generalmente, tales criterios se denominan "criterios de compensación":

1. El criterio de Kaldor: el estado A es socialmente preferible al B, si aquellos que ganan con A pueden compensar a los que pierden (p. ej., sobornarlos para que acepten el estado A) y permanecer todavía en una posición mejor que la que disfrutan en B.

2. El criterio de Hicks: el estado A es socialmente preferido al B, si aquellos que perderían con A no pueden sobornar con éxito, para que no realicen el cambio de B a A, a aquellos que ganarían con él.

10. En términos del diagrama de la caja de Edgeworth discutido en la sección 7-1, la introducción de la función de bienestar social equivale a ordenar todos los puntos de la curva de contrato desde el punto de vista de la preferencia social.

11. Una función de bienestar social es análoga a la función de utilidad de un consumidor individual. Proporciona un escalonamiento —desde el punto de vista de la sociedad o de un dictador— de las alternativas posiciones en las que los distintos individuos gozan de diversos niveles de utilidad. Posee la propiedad de que si una función de bienestar social dada proporciona un orden aceptable, lo mismo hace cualquier transformación monótona suya. El lector puede verificar esta proposición procediendo de un modo análogo al análisis de la Sec. 2-3. Supongamos que la función de bienestar es $S = G(W)$, donde $G' > 0$ y obtengamos las condiciones de primero y segundo grado de un máximo.

3. El criterio de Scitovsky: el estado A es socialmente preferible al B, si los ganadores pueden sobornar a los perdedores para que acepten el cambio y, simultáneamente, los perdedores no pueden sobornar a los *ganadores para que no lo hagan.*

La dificultad fundamental de los principios de compensación es que se refieren más al bienestar potencial que al actual, puesto que no exigen que se pague efectivamente la compensación. En general, y en ausencia de la actual compensación, nada puede decirse acerca del grado de preferencia de A sobre B, salvo que se esté dispuesto a hacer adicionales juicios de valor. Consideremos el caso en el que se contempla un cambio del estado A al B. Algunas personas se ven afectadas desfavorablemente por el movimiento, otras, en cambio, salen beneficiadas. Supongamos que exista una forma posible de redistribución de la renta (I) que compensa a los perdedores; supongamos también que con ella los perdedores no pueden sobornar a los ganadores para que se opongan al cambio de A a B. Sin embargo, no existe garantía alguna de que la redistribución que compensaría a los perdedores se lleve a efecto. La actual redistribución (II), que sigue al establecimiento de B, puede ser tal que los perdedores no se vean compensados. Además, es posible que los perdedores hubieran podido bloquear efectivamente el movimiento hacia B (sobornando a los compradores) si hubiesen conocido que el resultado actual iba a determinar la redistribución II. En estas circunstancias no es legítimo afirmar que el cumplimiento del criterio de Scitovsky implica que el estado B es socialmente preferible al A.

En el esfuerzo de crear una contrapartida social a las curvas de indiferencia individuales, los economistas han tratado de construir, en el espacio de bienes, líneas de contorno, que representan combinaciones alternativas de las cantidades totales de artículos entre los que la sociedad, en su conjunto, se encuentra indiferente. Los *contornos de Scitovsky* se obtienen del modo que sigue. Supongamos que todos los individuos gozan de niveles de utilidad específicos y que los outputs de todos los artículos, menos uno, están a niveles predeterminados. Determinemos entonces la cantidad más pequeña del artículo restante necesaria para cumplir las anteriores condiciones. Para una economía de dos personas y dos artículos, el problema se expresa matemáticamente como sigue:

$$\text{Minimícese } q_{11} + q_{21}$$

$$\text{sujeto a} \qquad \begin{aligned} U_1(q_{11}, q_{12}) - U_1^0 &= 0 \\ U_2(q_{21}, q_{22}) - U_2^0 &= 0 \\ q_{12} + q_{22} &= q_2^0 \end{aligned}$$

Ese problema se puede resolver formando la función

$$V = q_{11} + q_{21} + \lambda_1 [U_1 (q_{11}, q_{12}) - U_1^0] + \lambda_2 [U_2 (q_{21}, q_2^0 - q_{12}) - U_2^0] \qquad (7\text{-}40)$$

donde λ_1 y λ_2 son multiplicadores de Lagrange, e igualando a cero las derivadas parciales respecto a q_{11}, q_{12}, q_{21}, λ_1, λ_2. La mínima cantidad total de Q_1 necesaria para satisfacer las condiciones del problema está, generalmente, determinada. Para cada valor posible de q_1^0 puede determinarse un valor óptimo distinto, de $q_1^0 = (q_{11} + q_{21})$. El lugar geométrico de todos los puntos (q_1^0, q_2^0) para valores dados, de U_1 y U_2, constituye el contorno de Scitovsky.[12] Si las curvas de indiferencia individuales son convexas hacia el origen, los contornos de Scitovsky también lo serán. Sin embargo, estos contornos no son curvas de indiferencia "social" como podría parecer si se consideran solamente sus formas. Si se cambian los valores específicos de U_1 y U_2, se obtiene un contorno de Scitovsky completamente distinto. Tomemos por ejemplo el punto A del contorno de Scitovsky S_1, de la figura 7-3. Para cada *punto de S_1, las cantidades totales de Q_1 y Q_2 deben distribuirse entre* los dos consumidores de tal manera que el I goce del nivel de utilidad U_1^0, y el II el nivel U_2^0. Pero las cantidades correspondientes a A pueden también distribuirse de otra forma, que da como resultado un nivel de utilidad $U_1^{(1)}$ para I y $U_2^{(1)}$ para II. Llevando a cabo el proceso de maximización de la forma indicada en (7-40) para los nuevos valores de U_1 y U_2, se determina una serie completamente nueva de puntos, que describen un nuevo contorno de Scitovsky correspondiente a los diferentes niveles de utilidad asignados a los individuos. El nuevo contorno S_2 debe tener un punto en común con S_1 en A, pero evidentemente no existe motivo alguno para que los dos contornos coincidan en toda su extensión. S_1 y S_2 pueden, por tanto, cortarse o ser tangentes en el punto A (como en la figura 7-3). Ninguno de los dos casos es consistente con las propiedades usuales de las curvas de indiferencia.

La introducción explícita de juicios de valor en la forma de la función de bienestar social permite la obtención de líneas de contorno de propiedades deseables. Sea la función de bienestar social $W = W(U_1, U_2)$ en una sociedad de dos personas. Hallemos los contornos de Scitovsky correspondientes a todas las distribuciones de utilidad (U_1, U_2) para las que $W(U_1, U_2) = W^0$. Los contornos que resultan se muestran en la

12. Hallando las derivadas parciales de (7-40), el lector puede observar que los puntos de un contorno de Scitovsky representan una distribución de artículos óptima en el sentido de Pareto.

figura 7-4. La menor ordenada correspondiente a cada valor de q_1 representa la cantidad mínima de Q_2 necesaria para garantizar a la sociedad el nivel de bienestar W^0. Por tanto, la envolvente B de los contornos de Scitovsky de la figura 7-4, es el lugar geométrico de las combinaciones mínimas de Q_1 y Q_2 necesarias para garantizar a la sociedad el nivel de bienestar W^0, y se denomina *contorno* de *Bergson*. [13]

El problema de hallar el punto de máximo bienestar puede así resolverse de dos formas distintas.

1. Cada punto de la función de transformación total define una combinación de artículos que se puede obtener con los recursos existentes.

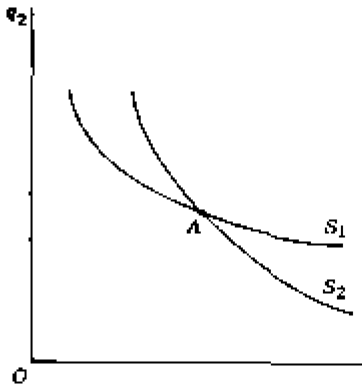


FIGURA 7-3

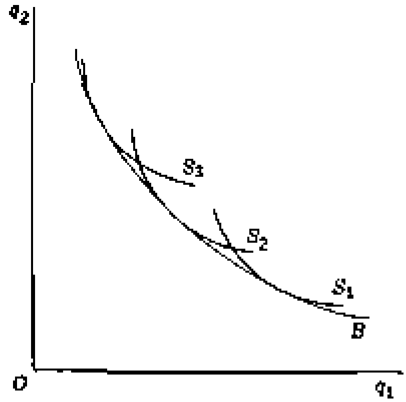


FIGURA 7-4

Aún en el caso de que sólo se consideren las distribuciones de artículos óptimas en el sentido de Pareto, a cada punto de la función de transformación total corresponde una curva de contrato, de manera que existe un número infinito de formas mediante las que se puede distribuir la utilidad entre los consumidores. [14] Hallemos todas las maneras posibles *de distribuir utilidad, entre los consumidores, correspondiente a todos* los puntos que satisfagan la función de transformación. De todas estas distribuciones de utilidad escojamos aquella para la que $W(U_1, U_2, \ldots, U_n)$

13. Véase J. de V. Graaff, *Theoretical Welfare Economics* (London: Cambridge University Press, 1957), chap. III. Los afortunados términos de *contorno de Scitovsky* y *contorno Bergson* son debidos a Graaff. En ausencia de efectos externos, los contornos de Bergson no se cortan, pero no poseen necesariamente la convexidad "apropiada".

14. La representación geométrica de todas las formas posibles de distribuir la utilidad entre dos consumidores correspondiente a un punto dado de la curva de transformación agregada recibe el nombre de *curva de posibilidad de utilidad*.

es un máximo. La solución se obtiene examinando puntos del espacio de utilidad.

2. Determinemos todos los contornos de Bergson. Cada uno de éstos *corresponde a un nivel de bienestar distinto. Escojamos aquel punto de* la función de transformación total que esté en el contorno de Bergson más alta entre los permisibles. La solución se obtiene, por tanto, examinando puntos en el espacio de bienes. La equivalencia de ambos procedimientos es obvia si se tiene en cuenta que ambos equivalen a maximizar $W(U_1, \ldots, U_n)$ sujeto a la restricción establecida por la función de producción total.

7-5. Resumen

El objeto de la economía del bienestar es valorar la deseabilidad social de las alternativas distribuciones de recursos. En ausencia de claborados juicios de valor relativos a la deseabilidad de las alternativas distribuciones de la renta, uno, simple, consiste en considerar que una redistribución dada representa una mejora del bienestar si consigue que al menos una persona resulta beneficiada sin perjudicar a los demás. Si no es posible redistribuir los recursos sin perjudicar por lo menos a una persona, la distribución existente es óptima en el sentido de Pareto. Para que exista este óptimo es necesario. 1.º que sean iguales las correspondientes relaciones de sustitución de todos los consumidores; 2.º que sean también iguales las correspondientes relaciones de transformación de todos los productores; 3.º que las relaciones de sustitución so igualen a *las correspondientes relaciones de transformación*. Para alcanzar un máximo de bienestar, en el sentido de Pareto, deben también cumplirse las condiciones de segundo grado.

La competencia perfecta da lugar al cumplimiento de las condiciones de primer grado del óptimo de Pareto. En este sentido, la competencia perfecta representa un óptimo de bienestar. No garantiza, sin embargo, que se cumplan las condiciones de segundo grado ni que la distribución de la renta (o de la utilidad) sea óptima en ningún sentido. Además, la definición de óptimo de bienestar en términos de la optimalidad de Pareto deja alguna indeterminación en el análisis, puesto que cada punto de la curva de contrato es un óptimo de Pareto y no se puede escoger entre ellos sin restricciones adicionales.

Se ha mostrado que la existencia de elementos monopolísticos en la competencia entre consumidores y empresarios, en cualquier mercado, excluye la posibilidad de una distribución que sea óptima en el sentido de Pareto. Aún si, por casualidad, las relaciones de sustitución entre artículos, de los consumidores, fueran iguales a las correspondientes relaciones de transformación de productos, de los productores, el óptimo de Pareto seguiría siendo inalcanzable como resultado de las divergencias entre las relaciones de sustitución entre artículos y trabajo, de los consumidores, y las correspondientes relaciones de transformación de trabajo en artículos, de los productores.

Las condiciones bajo las que se alcanza un óptimo de Pareto en competencia perfecta deben modificarse en presencia de efectos externos tales como funciones de utilidad interdependientes y economías y deseconomías externas. La igualdad de las relaciones de sustitución de artículos ya no es suficiente para garantizar un óptimo de Pareto en el sector de consumo (incluso si se supusiese que se han cumplido las condiciones de segundo grado). En el sector productivo el precio, debe igualar el coste marginal social, y no el coste marginal privado. Generalmente, puede obtenerse una distribución óptima en el sentido de Pareto por medio de subsidios e impuestos apropiados sobre la venta de artículos cuyas producciones causen economías o deseconomías externas respectivamente.

Introduciendo, explícitamente, una función de bienestar social que establezca las preferencias de la sociedad (o de un dictador) entre las alternativas distribuciones de utilidad entre los individuos, se puede eliminar la indeterminación que contiene el análisis del óptimo de Pareto. Existen muchas funciones de bienestar social, y no una, expresando cada una de ellas las valoraciones de distintos grupos de individuos. Cuál de ellas se escoja, para el propósito de resolver el problema de la distribución, depende de la estructura institucional dentro de la que la sociedad decida sobre estas materias. Los economistas han intentado juzgar el grado de preferencia social de posiciones alternativas, en términos de la capacidad de los ganadores para compensar a los perdedores y de la incapacidad, de estos últimos, para sobornar a los ganadores para que no lleven a cabo la redistribución. Si la compensación es más potencial que actual, tales principios de compensación no son válidos. La deseabilidad de una reorganización de la economía puede aún valorarse, sin embargo, trasladando la función de bienestar social al espacio de bienes y hallando aquel punto de la curva de transformación de la sociedad que descanse en el contorno de Bergson más elevado.

SELECCIÓN DE CITAS

ARROW, K. J., *Social Choice and Individual Values* (Nueva York: Wiley, 1951). Un tratado sobre los problemas de la construcción de una función de bienestar social.

BATOR, F. M., *The Simple Analytics of Welfare Maximization*, "American Economic Review", vol. 47 (marzo 1957), pp. 22-59. Una exposición geométrica de algunos resultados fundamentales de la economía del bienestar.

BAUMOL, W. J., *Welfare Economics and the Theory of the State* (Londres: Longmans, 1952). Contiene una discusión de las implicaciones sobre el bienestar de la competencia perfecta y el monopolio y un análisis de parte de la literatura decimonónica sobre el bienestar.

BERGSON, A., *A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics*, "Quarterly Journal of Economics", vol. 52 (febrero 1938), pp. 310-334. Editado también por R. V. Clemence (ed.), "Readings in Economic Analysis" (Cambridge, Mass.: Addison-Wesley, 1950), vol. I, pp. 61-85. El primer tratado matemático moderno sobre economía del bienestar.

GRAAFF, J. de V., *Theoretical Welfare Economics* (Londres: Cambridge University Press, 1957). Un tratado sobre el bienestar recogiendo las teorías de la última década. Las matemáticas están contenidas en apéndices.

LERNER, A. P., *The Economics of Control* (Nueva York: Macmillan, 1944). Un análisis no matemático de la maximización del bienestar en una economía dirigida. (Trad. al castellano: Fondo de Cultura Económica, Méjico.)

LITTLE, I. M. D., *A Critique of Welfare Economics* (Oxford: Clarendon Press, 1950). Contiene discusiones sobre los juicios de valor, las condiciones del bienestar máximo y algunas aplicaciones de la economía del bienestar. La geometría es el instrumento del análisis.

SAMUELSON, PAUL A., *Foundations of Economic Analysis* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1948). El capítulo VIII contiene una discusión de la función de bienestar social y de las condiciones del bienestar máximo. Las matemáticas son sólo incidentales. (Trad. al castellano: El Ateneo, Buenos Aires.)

SCITOVSKY, T., *Welfare and Competition* (Homewood, Ill.: Irwin, 1951). Libro de texto, gran parte del cual se dedica a las implicaciones sobre el bienestar de las diversas formas de mercado. Se usan matemáticas elementales y geometría.

—, *A Reconsideration of the Theory of Tariffs*, "Review of Economic Studies", vol. 9 (1941-1942), pp. 89-110. Editado también por American Economic Association, "Readings in the Theory of International Trade" (Nueva York: Blakiston Division, McGraw-Hill, 1949), pp. 358-389. En este artículo se introdujo el concepto del contorno de Scitovsky y se aplicó a la teoría del comercio internacional.

CAPÍTULO 8

OPTIMIZACIÓN TEMPORAL

Las teorías del consumo y la producción, tal como se presentan en los capítulos II y III se refieren a la optimización en un solo período de tiempo. En un análisis a corto plazo se supone que los empresarios poseen empresas de una dimensión fija, pero aparte de esto, se supone también que las decisiones de optimización de cada unidad, para períodos de tiempo sucesivos, son independientes. El consumidor gasta toda su renta durante el período en curso y maximiza el nivel de un índice de utilidad definido solamente para bienes consumidos durante el mismo período. De modo parecido, la función de producción del empresario relaciona inputs y outputs durante el período en curso, y maximiza su beneficio para este período.

En el capítulo presente se definen las funciones multiperíodos de utilidad y producción, y se generalizan las teorías uniperiódicas de consumo y producción para que comprendan la optimización temporal. La introducción del tiempo va acompañada de cierto número de supuestos simplificadores. El tiempo se divide en períodos de igual duración, y se supone que las transacciones de mercado se limitan al primer día de cada período. Durante los restantes días del mismo los consumidores proporcionan los factores que han vendido y consumen los artículos que han comprado; los empresarios emplean los inputs que han adquirido y producen bienes para venderlos en la próxima fecha de mercado. El gasto corriente del consumidor ya no viene condicionado por una ecuación de balance de un solo período. Puede gastar más o menos que su renta y pedir prestada, o prestar, la diferencia. Los empresarios también tienen la posibilidad de percibir y conceder créditos.

En la Sección 8-1 se describen el mercado crediticio y los conceptos

NOTA DEL TRADUCTOR: En el capítulo presente designamos simbólicamente al ingreso por I, mientras que la inversión se expresa por I.

de interés y descuento. La Sección 8-2 contiene una ampliación de la teoría del consumidor al caso de muchos períodos y muchos bienes. En la Sección 8-3 se consideran la preferencia temporal y los efectos de los tipos de interés sobre los gastos de consumo en el transcurso del tiempo. La Sección 8-4 contiene una breve discusión de cómo puede extenderse la teoría de la producción al caso multiperíodo, y en la Sección 8-5 se desarrolla una teoría de inversión de la empresa. En la Sección 8-6 se indican diferentes métodos para generalizar los análisis del equilibrio simple y el del multimercado para que cubran los fenómenos de los tipos de interés y de las expectativas multiperiódicas. Finalmente, el apéndice contiene una discusión de los problemas que envuelve la determinación de la longitud de los períodos de inversión.

8-1. Conceptos básicos

El análisis multiperíodo requiere la introducción de varios nuevos conceptos para describir los métodos y costes de percibir y conceder créditos.

El mercado crediticio. — Se introduce en el análisis, el mercado del crédito con los siguientes supuestos simplificadores: 1.º consumidores y empresarios sólo pueden concertar créditos el primer día de cada período; 2.º solamente existe un tipo de instrumentos de crédito: préstamos de un solo período de duración; 3.º el mercado crediticio es perfectamente competitivo; 4.º los prestamistas venden crédito a los prestatarios a cambio de cantidades específicas de poder de compra en curso, expresado en términos de dinero de cuenta, y 5.º los intereses y las cargas del préstamo se pagan sin falta en la siguiente fecha de mercado.

Estos supuestos representan una simplificación considerable de los mercados de crédito actuales, pero permiten una fácil deducción de muchos resultados básicos que pueden generalizarse a mercados más complicados. A costa de complicar el análisis se puede relajar cualquiera de los anteriores supuestos sin alterar esencialmente los resultados básicos. El supuesto primero se sigue de la definición discreta del tiempo utilizada en el análisis multiperíodo. A medida que el período se hace cada vez menor, las transacciones se hacen más frecuentes, y son continuas en el caso límite.[1]

1. Como ejemplo de un análisis en el que las transacciones de mercado se supone que tienen lugar continuamente, véase el apéndice de este capítulo.

El segundo supuesto se podría alterar admitiendo la existencia de diferentes tipos de instrumentos de crédito, p. ej., pagarés e hipotecas, con distintos vencimientos. El supuesto tercero se puede relajar continuando el análisis de la competencia monopolística dado en el capítulo 6. Los supuestos cuarto y quinto también se pueden alterar de varias maneras.

Sea b_t la posición financiera de un individuo al final de la contratación de la fecha de mercado t^a. El signo de b_t indica si es prestatario o prestamista. Si $b_t < 0$ es prestatario con créditos vigentes y en la fecha de mercado $(t + 1)$ debe devolver b_t dólares más el rédito apropiado. Si $b_t > 0$, es un prestamista que confiere créditos a otros y que en la fecha de mercado $(t + 1)$ recibirá b_t dólares más el rédito apropiado.

Puesto que los réditos se expresan también en dinero de cuenta, pueden establecerse como proporciones de las cantidades prestadas. En la fecha de mercado $(t + 1)$ un prestatario debe devolver $(1 + i_t)$ veces la cantidad que le fue prestada en la t^a. La proporción i_t es el tipo de interés del mercado que conecta las fechas de mercado t^a y $(t + 1)$. Puesto que se supone que el mercado crediticio es perfectamente competitivo, el tipo de interés del mercado no se ve afectado por las operaciones de crédito de cada individuo en particular, y es el mismo para todos los individuos. Frecuentemente, los tipos de interés se expresan en porcentajes. Si el tipo de interés es i_t el rédito es $100 i_t$ por ciento de la cantidad prestada. Por ejemplo, el rédito es del 5 por 100 si $i_t = 0{,}05$.

Tipos de rendimientos de mercado. — Los individuos que deseen solicitar créditos de duración superior a un período pueden vender nuevos títulos en fechas de mercado sucesivas para pagar el principal y los intereses a sus vencimientos. De modo parecido, los prestamistas pueden reinvertir su principal y la renta debida al interés. Consideremos el caso de un individuo que invierte b_t dólares en la fecha de mercado t^a y continúa hasta la τ^a. El valor de sus inversiones al principio de la fecha de mercado $(t + 1)$ es $b_t (1 + i_t)$. Si invierte toda la cantidad, el valor de su inversión al principio de la fecha de mercado $(t + 2)$ es $b_t (1 + i_t)(1 + i_{t+1})$. El valor de sus inversiones al principio de la fecha de mercado τ^a es

$$b_t (1 + i_t)(1 + i_{t+1}) \dots (1 + i_{\tau-1})$$

El rendimiento total de esta inversión es

$$J = b_t (1 + i_t)(1 + i_{t+1}) \dots (1 + i_{\tau-1}) - b_t$$

Puesto que el mercado de títulos es pefrectamente competitivo, los tipos de rendimiento medio y marginal ($\xi_{t\tau}$) de esta inversión son iguales y constantes:

$$\xi_{t\tau} = \frac{J}{b_t} = \frac{dJ}{db_t} = (1 + i_t)(1 + i_{t+1}) \cdots (1 + i_{\tau-1}) - 1 \qquad (8\text{-}1a)$$

Por ejemplo, si $\tau = (t + 2)$, $i_t = 0{,}10$ y $i_{t+1} = 0{,}06$,

$$\xi_{t,t+2} = (1{,}10)(1{,}06) - 1 = 0{,}166.$$

Puesto que el inversor está ganando intereses sobre los intereses previos, el tipo de interés compuesto de mercado que se devuelve es mayor que la suma de los tipos de intereses individuales. Es interesante notar que únicamente los niveles de los tipos de interés afectan el tipo de rendimiento, pero no el orden de su secuencia. El tipo de rendimiento del mercado es 0,166 para $i_t = 0{,}06$ y $i_{t+1} = 0{,}10$.

Es conveniente definir

$$\xi_{tt} = 0 \qquad (8\text{-}1b)$$

que establece que si un inversor pide y concede créditos en la misma fecha de mercado ganará un tipo de rendimiento nulo. Los tipos de rendimiento de mercado definidos por (8-1) son aplicables tanto para la petición como para la concesión de créditos.

Si el inversor espera un tipo de interés constante, $i_t = \ldots = i_{\tau-1} = i$, las ecs. (8-1*a*) y (8-1*b*) se convierten en

$$\xi_{t\tau} = (1 + i)^{\tau - t} - 1$$

que puede calcularse con una tabla de interés compuesto para valores específicos de $(\tau - t)$ e i.

Tipos de descuento y valores actuales. — La existencia de un mercado crediticio implica que un individuo racional no considerará equivalente un dólar pagable en la fecha de mercado en curso ($t = 1$) a uno pagable en una fecha de mercado futura. Si invierte un dólar en préstamo en la fecha de mercado actual recibirá $(1 + i_1)$ dólares en la segunda fecha de mercado. Un dólar pagadero en la segunda fecha de mercado es el equivalente en el mercado de $(1 + i_1)^{-1} = 1/(1 + i_1)$ pagaderos en la primera. Es posible conceder un crédito de $(1 + i_1)^{-1}$ dólares en la primera fecha de mercado y recibir un dólar en la segunda, o pedir un préstamo de $(1 + i_1)^{-1}$ dólares en la primera y devolver un dólar en la segunda. La razón $(1 + i_1)^{-1}$ es el *tipo de descuento* para cantidades pagaderas en la segunda fecha de mercado. El *valor actual*, llamado a veces valor descontado, de y_2 dólares pagaderos en la segunda fecha de mercado es $y_2(1 + i_1)^{-1}$ dólares.

Se pueden definir tipos de descuentos para cantidades pagaderas en cualquier fecha de mercado. En general, el tipo de descuento para sumas pagaderas en la fecha de mercado t^a es

$$[(1 + i_1)(1 + i_2) \dots (1 + i_{t-1})]^{-1} = (1 + \xi_{1t})^{-1}$$

De la (8-1) se sigue que una inversión de $(1 + \xi_{1t})^{-1}$ dólares en la primera fecha de mercado tendrá un valor de un dólar en la t^a.

Es posible expresar toda una corriente de renta o de gasto por un solo número en términos de su valor actual. Consideremos el flujo de renta $(y_1, y_2, \dots, y_\tau)$ donde y_t es la renta pagadera en la fecha de mercado t^a. El valor actual (y) de este flujo es

$$y = y_1 + \frac{y_2}{(1 + \xi_{12})} + \dots + \frac{y_\tau}{(1 + \xi_{1\tau})}$$

Si todos los tipos de interés son positivos, el tipo de descuento aumenta y el valor actual de cualquier cantidad fija disminuye a medida que aumenta τ. Si todos los tipos de interés son 0,10, el valor actual de un dólar pagadero en la segunda fecha de mercado es aproximadamente 0,91 dólares, un dólar pagadero en la quinta es aproximadamente 0,68, un dólar pagadero en la décima aproximadamente 0,42.

El cálculo de los valores presentes permite una provechosa comparación económica entre las alternativas corrientes de renta y gasto. Supongamos que el tipo de interés es 0,10 y consideremos dos alternativas corrientes biperiódicas de renta: $(y_1 = 100, \; y_2 = 330)$ e $(y_1 = 300, \; y_2 = 121)$. La primera corriente de renta contiene nueve dólares más que la segunda, pero siempre se preferirá la segunda, puesto que su valor actual (410 dólares) es mayor que el de la primera (400 dólares). La preferibilidad de la segunda corriente se puede demostrar transformando el flujo de renta en uno directamente comparable a la primera. En la primera fecha de mercado el segundo flujo de renta da a su perceptor 200 dólares *más* que el primero. Dejemos que en la primera fecha de mercado invierta estos 200 dólares en títulos. De esta forma le queda una renta gastable de 100 dólares en la primera fecha de mercado y una acumulación de 220 dólares a su renta gastable en la segunda. El flujo de renta así transformado es $(y_1 = 100, \; y_2 = 341)$, que es claramente preferible al primer flujo de renta. Este resultado se puede generalizar: independientemente de cómo se transforme un flujo de renta por los créditos y préstamos, un flujo de renta con un valor actual mayor puede transformarse en un flujo preferible.

8-2. El consumo multiperíodo

Generalmente, un consumidor percibe renta y adquiere bienes en cada fecha de mercado. Sus adquisiciones actuales están influidas por sus expectativas de precios y niveles de renta futuros, y debe tratar de planear las compras para fechas de mercado futuras. Si sus expectativas han sido correctas y sus gustos no difieren del modelo previsto, en las fechas de mercado futuras llevará a cabo sus planes. Si no se realizan sus expectativas, revisará los planes proyectados. La discusión presente se limita al caso de un consumidor que formula un plan coordinado, en la fecha de mercado en curso, de sus gastos de consumo en bienes, en un horizonte de T períodos. Su horizonte es simplemente el período de tiempo para el que planea en la fecha de mercado en curso. Puede tener cualquier duración, pero para simplificar, suponemos que corresponde al resto de su vida esperada. No es necesario que el sujeto conozca actualmente cuánto vivirá; basta con que planee como si lo supiera. Si en el futuro cambiase su expectativa vital, alteraría su horizonte en consecuencia, y revisaría sus planes.

La función de utilidad multiperíodo. — En el caso más general el índice de utilidad ordinal del consumidor depende del consumo planeado de cada uno de los n bienes en cada uno de los T períodos

$$U = U(q_{11}, \ldots, q_{n1}, q_{12}, \ldots, q_{n2}, \ldots, q_{1T}, \ldots, q_{nT}) \qquad (8\text{-}2)$$

de tiempo donde q_{it} es la cantidad de Q_i que compra en la fecha de mercado t^a y consume durante este mismo período.

La construcción de un mero índice de utilidad no implica que el consumidor espere que sus gustos no cambiarán con el transcurso del tiempo. Implica solamente que él planea como si conociese el modo en que cambiarán. Por ejemplo, puede saber que un cochecito de niño le rendirá un gran servicio en los años en que su familia esté creciendo pero después no le rendirá ninguno. El índice de utilidad (8-2) no es válido necesariamente para todo el horizonte de planificación del consumidor. Expresa meramente sus expectativas presentes. En una fecha de mercado futura, un cambio en las circunstancias objetivas o en sus deseos subjetivos puede inducirle a revisar su índice de utilidad. El consumidor que formule su índice de utilidad esperando convertirse en padre de una niña revisará seguramente su índice de utilidad si de hecho se convierte en padre de niños trillizos. Un consumidor que descubra un nuevo bien deseable revisará su índice de utilidad para incluirlo.

La ecuación de balance. — Durante las fechas de mercado dentro de su horizonte de planificación, el consumidor espera recibir la corriente de renta ganada ($y_1, y_2, ..., y_T$). Generalmente, su corriente de renta esperada no es estable en el tiempo. Es probable que el consumidor gane una renta relativamente baja durante los primeros años de su vida de trabajo, que aumentará a medida que gane en entrenamiento y madurez y alcanzará un máximo durante los años intermedios de su vida de trabajo. La renta percibida puede entonces empezar a decaer y llegar a cero después de su jubilación. Cualquiera que sea su corriente de renta ganada, raras veces coincidirá con su corriente deseada de consumo. Por medio de créditos y préstamos puede conciliar ambos extremos.

La renta total que percibe el consumidor en la fecha de mercado t^a es la suma de su renta ganada y la renta de intereses de los títulos que detentaba durante el período precedente:

$$(y_t + i_{t-1}\, b_{t-1})$$

Su renta de intereses será positiva si su tenencia de títulos es positiva, y negativa si dicha tenencia es negativa, o sea si está endeudado. Su ahorro esperado en la fecha de mercado t^a, indicado por s_t, se define como la diferencia entre su renta total esperada y los gastos totales de consumo en aquella fecha:

$$s_t = y_t + i_{t-1}\, b_{t-1} - \sum_{j=1}^{n} p_{jt}\, q_{jt} \qquad (t = 1, ..., T) \tag{8-3}$$

donde p_{j1} es el precio de Q_j en la fecha inicial de mercado y p_{jt} ($t = 2, ..., T$) es el precio que él espera que prevalezca para Q_j en la fecha de mercado t^a. Si los gastos del consumidor exceden a su renta total, sus ahorros serán negativos.

Si el consumidor se encuentra al principio de su vida de trabajo, sus títulos iniciales (b_0) representan la riqueza heredada. Si está revisando sus planes en una fecha subsiguiente al principio de su vida de trabajo, su tenencia de títulos refleja también los resultados de sus decisiones de ahorro pasadas. Para simplificar el análisis presente, supongamos que se encuentra al principio de su vida de trabajo y que $b_0 = 0$. En cada fecha de mercado el consumidor aumentará o disminuirá el valor de su tenencia de títulos en la magnitud de los ahorros verificados en aquella fecha:

$$b_t = b_{t-1} + s_t \qquad (t = 1, \ldots, T) \tag{8-4}$$

Durante los primeros años de su vida de trabajo, cuando gana una renta relativamente baja, el consumidor "típico" puede gastar más de lo que tiene, y endeudarse, para comprar una casa y crear una familia; después ahorra para saldar sus deudas y establecer una posición crediticia positiva durante el resto de su vida de trabajo; y finalmente durante su retiro dis-ahorra y liquida sus títulos.

Tomando conjuntamente (8-3) y (8-4), la tenencia esperada de títulos del consumidor tras las transacciones efectivas en la fecha de mercado τ^a, puede expresarse como función de las rentas que ha ganado, sus niveles de consumo, los precios, y los tipos de interés:

$$b_1 = \left(y_1 - \sum_{j=1}^{n} p_{j1} q_{j1}\right)$$

$$b_2 = \left(y_1 - \sum_{j=1}^{n} p_{j1} q_{j1}\right)(1 + i_1) + \left(y_2 - \sum_{j=1}^{n} p_{j2} q_{j2}\right)$$

$$b_3 = \left(y_1 - \sum_{j=1}^{n} p_{j1} q_{j1}\right)(1 + i_1)(1 + i_2) + \left(y_2 - \sum_{j=1}^{n} p_{j2} q_{j2}\right)(1 + i_2) + \left(y_3 - \sum_{j=1}^{n} p_{j3} q_{j3}\right)$$

y en general, utilizando (8-1a),

$$b_\tau = \sum_{t=1}^{\tau} \left(y_t - \sum_{j=1}^{n} p_{jt} q_{jt}\right)(1 + \xi_{t\tau}) \qquad (\tau = 1, \ldots, T) \tag{8-5}$$

En la fecha de mercado τ^a, tras las transacciones, la tenencia de títulos del consumidor es igual a la suma algebraica de todos sus ahorros hasta aquella fecha, netos de gastos o rentas de intereses, incrementados a interés compuesto.

En el caso de un solo período, y, si no estuviera obligado por la ecuación de balance, el consumidor que optimizara compraría una cantidad de cada bien lo suficientemente grande para alcanzar su saturación completa. En el caso multiperíodo se presentaría una situación parecida si no existiese limitación en la cantidad de deuda que puede amasar durante su vida. La ecuación de balance en el análisis multiperíodo puede expresarse como una restricción sobre la cantidad final de títulos que puede poseer el consumidor (b_T). El consumidor puede planear el dejar a sus herederos un legado (o deudas), pero para simplificar supongamos que no piensa legarles ni activos ni deudas. Determinando el valor de b_T de (8-5), su ecuación de balance es:

$$b_T = \sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{j=1}^{n} p_{jt}\, q_{jt}\right)(1+\xi_{tT}) = 0$$

Dividiendo todo por la constante $(1 + \xi_{1T})$ y trasladando los términos de gasto de consumo a la derecha, la ecuación de balance del consumidor puede escribirse también como

$$\sum_{t=1}^{T} y_t\,(1+\xi_{1t})^{-1} = \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n} p_{jt}\, q_{jt}\,(1+\xi_{1t})^{-1} \qquad (8\text{-}6)$$

puesto que

$$\frac{1+\xi_{tT}}{1+\xi_{1T}} = \frac{(1+i_t)\ \ldots\ (1+i_{T-1})}{(1+i_1)\ \ldots\ (1+i_{T-1})}$$

$$= \frac{1}{(1+i_1)\ \ldots\ (1+i_{t-1})} = (1+\xi_{1t})^{-1}$$

En la forma (8-6) la ecuación de balance establece que el consumidor iguala los valores actuales de la renta ganada y su corriente de consumo.

Maximización de la utilidad. — El consumidor desea maximizar el nivel de su índice (8-2) de utilidad del período de toda su vida sujeto a su ecuación de balance (8-6). Formemos la función

$$U^* = U(q_{11}, \ldots, q_{nT}) + \lambda \sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{j=1}^{n} p_{jt}\, q_{jt}\right)(1+\xi_{1t})^{-1}$$

e igualemos a cero sus derivadas parciales

$$\frac{\partial U^*}{\partial q_{jt}} = \frac{\partial U}{\partial q_{jt}} - \lambda\,(1+\xi_{1t})^{-1} p_{jt} = 0 \qquad \begin{matrix}(j = 1, \ldots, n)\\ (t = 1, \ldots, T)\end{matrix}$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial \lambda} = \sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \sum_{j=1}^{n} p_{jt} q_{jt}\right)(1+\xi_{1t})^{-1} = 0$$

y

$$-\frac{\partial q_{jt}}{\partial q_{k\tau}} = \frac{\partial U/\partial q_{k\tau}}{\partial U/\partial q_{jt}} = \frac{p_{k\tau}(1+\xi_{1\tau})^{-1}}{p_{jt}(1+\xi_{1t})^{-1}} \qquad \begin{matrix}(j, k = 1, \ldots, n)\\ (t, \tau = 1, \ldots, T)\end{matrix} \qquad (8\text{-}7)$$

El consumidor debe igualar las relaciones de sustitución de cada par de bienes, en cada par de períodos, a la razón de sus precios descontados.

Las condiciones de primer grado son parecidas a las del análisis de un solo período. Ahora los bienes se distinguen tanto por su período de tiempo como por su clase, y los precios descontados han reemplazado a los precios simples. Una vez hechas estas modificaciones, las condiciones de segundo grado son las mismas que las dadas en la Sección 2-7 para el análisis de un solo período. Si los tipos de interés permanecen inalterados,[2] es posible definir los efectos renta y sustitución con respecto a cambios de los precios descontados de los distintos bienes en las diversas fechas de mercado.

Funciones de demanda. — Hallando las demandas de bienes del consumidor a partir de las nT ecuaciones independientes dadas por (8-7) y la ecuación de balance, tenemos:

$$q_{jt} = D_{jt}(p_{11}, \ldots, p_{nT}, i_1, \ldots, i_{T-1}) \qquad \begin{matrix} (j = 1, \ldots, n) \\ (t = 1, \ldots, T) \end{matrix}$$

La demanda del consumidor del bien j^o en la fecha de mercado t^a depende del precio de cada bien en cada fecha de mercado y de los tipos de interés que relacionan cada par de períodos sucesivos. Las funciones de demanda de títulos por parte del consumidor se obtienen sustituyendo en (8-5), las q_{jt} por las funciones de demanda de bienes

$$\begin{aligned} b_\tau &= \sum_{t=1}^{\tau} \left\{ \left[y_t - \sum_{j=1}^{n} p_{jt} D_{jt}(p_{11}, \ldots, i_{T-1}) \right] (1 + \xi_{t\tau}) \right\} \\ &= b_\tau(p_{11}, \ldots, i_{T-1}) \qquad\qquad (\tau = 1, \ldots, T) \end{aligned}$$

Si los niveles de renta ganada se tratan como parámetros, las compras de títulos son también funciones de todos los precios y todos los tipos de interés.

De nuevo, las funciones de demanda de bienes son homogéneas de grado cero en los precios y en los niveles de renta ganada: si se alteran por el factor $k > 0$ todos los precios y rentas ganadas actuales y esperadas, *permaneciendo iguales todos los tipos de interés,* la demanda de cada artículo del consumidor en cada fecha de mercado permanecerá

2. Puesto que cada tipo de interés constituye parte de los factores de descuento aplicables a todos los precios en todas las fechas de mercado que siguen a la fecha en que se determina ese tipo de interés, si cambiase uno de los tipos de interés cambiaría más de un tipo de descuento.

igual.[3] Las funciones de demanda de títulos son homogéneas de grado uno respecto a los niveles de precios y renta ganada. De la homogeneidad de grado cero de las funciones de demanda de bienes se sigue que

$$b_\tau(kp_{11}, \ldots, kp_{nT}, i_1, \ldots, i_{T-1}) = \sum_{t=1}^{\tau} \Big[ky$$

$$- \sum_{j=1}^{n} - kp_{jt} D_{jt}(kp_{11}, \ldots, kp_{nT}, i_1, \ldots, i_{T-1})(1 + \xi_{t\tau}) \Big] = kb_\tau$$

Si se doblasen cada uno de los elementos del flujo de renta ganada del consumidor y todos los precios, las compras planeadas de bienes permanecerían inalteradas, y se doblarían las compras planeadas de títulos. Sin embargo, puesto que su tenencia de títulos se mide en términos de la unidad monetaria de cuenta, el total de títulos se cambiará exactamente por la misma cantidad física de bienes que antes de que se duplicaran el número de los títulos y los precios de los bienes. Los tipos de interés son puros números, independientes de la unidad monetaria, y deben permanecer invariables si las demandas de artículos también lo son.

8-3. La preferencia temporal

Aunque gran parte del análisis del consumo multiperíodo es formalmente idéntico al análisis de un solo período, la introducción explícita del tiempo y de los tipos de interés presenta cierto número de nuevos problemas. Cuando se supone que los precios actuales y esperados de los artículos son de un valor fijo y no se alteran, puede enfocarse la atención sobre los problemas exclusivos del consumo multiperíodo. Entonces puede afirmarse que el problema del consumidor es el de seleccionar una estructura temporal óptima para sus gastos de consumo.

LA FUNCIÓN DE UTILIDAD DEL CONSUMO. — Para los pares de bienes comprados en una fecha de mercado concreta, las condiciones de primer grado dadas por (8-7) se convierten en

$$-\frac{\partial q_{jt}}{\partial q_{kt}} = \frac{p_{kt}}{p_{jt}} \qquad \begin{matrix} (j, k = 1, \ldots, n) \\ (t = 1, \ldots, T) \end{matrix} \tag{8-8}$$

3. La forma de probar esta afirmación es la misma que se ha utilizado para probar la afirmación similar en la sección 2-4.

El consumidor iguala la relación de sustitución entre bienes (*RSB*) entre cada par de artículos adquiridos en una sola fecha de mercado a las razones de sus precios. Las relaciones de sustitución intraperíodo son independientes de los tipos de interés. De forma que, con respecto a las adquisiciones en cada fecha de mercado, el consumidor satisface las condiciones de primer grado para la maximización de utilidad del análisis monoperíodo, con excepción de la ecuación de balance uniperiódica. El problema de optimización del consumidor puede dividirse en dos partes: 1.° la selección de los valores óptimos de sus gastos totales de consumo en las distintas fechas de mercado, y 2.° la selección de las combinaciones óptimas de bienes que correspondan a los gastos planeados en cada fecha de mercado. Una vez resuelto el primer problema, el consumidor puede resolver el segundo formulando T problemas uniperiódicos independientes, en los que los gastos de consumo total óptimos antes seleccionados actúan como ecuaciones de balance uniperiódicas.

Definamos c_t como el gasto total del consumidor en bienes en la fecha de mercado t:

$$c_t = \sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it} \qquad (t = 1, \ldots, T) \tag{8-9}$$

La función de utilidad (8-2), juntamente con (8-9) y las $(n-1)T$ ecuaciones independientes de (8-8), constituyen un sistema de $(nT+1)$ ecuaciones con $(nT+T+1)$ variables: U, q_{it} $(i = 1, \ldots, n)$ $(t = 1, \ldots, T)$, y c_t $(t = 1, \ldots, T)$. Generalmente es posible utilizar nT de estas ecuaciones para eliminar las q_{it}, de manera que el índice de utilidad del consumidor puede así expresarse en función de sus gastos de consumo:

$$U = V(c_1, \ldots, c_T) \tag{8-10}$$

Puesto que (8-10) se ha construido bajo el supuesto de que satisface (8-8), tal relación nos da el valor máximo del índice de utilidad correspondiente a cada tipo de gasto en consumo.

La relación tiempo-sustitución del consumidor:

$$-\frac{\partial c_\tau}{\partial c_t} = \frac{V_t}{V_\tau} \qquad (t, \tau = 1, \ldots, T)$$

es la relación según la que debe aumentarse el gasto de consumo en la fecha de mercado τ^a para compensar una reducción del gasto de consumo en la t^a dejando inalterado el nivel de satisfacción del consumidor. Nada se pierde en generalidad si se limita la atención a los casos en *que* $\tau > t$. Si la relación tiempo-sustitución del consumidor es 1,06, su gasto de consumo en la fecha de mercado τ debe aumentarse a la razón de 1,06 dólares por cada dólar de gasto de consumo que se sacrifique en el tiempo t^a. En otras palabras el consumidor ha de recibir, como mínimo, un premio de 0,06 dólares para que posponga al tiempo τ el gasto de un dólar en bienes de consumo en el período t. Este premio mínimo se define como la relación de preferencia temporal del consumidor del período t al período τ, y se la denota $\eta_{t\tau}$:

$$\eta_{t\tau} = -\frac{\partial c_\tau}{\partial c_t} - 1 \qquad (t, \tau = 1, \ldots, T) \qquad (\tau > t) \qquad (8\text{-}11)$$

Las relaciones de preferencia temporal del consumidor pueden ser negativas para algunas formas temporales de consumo, o sea: puede preferir el sacrificar el valor de un dólar de consumo en el período t para asegurar un valor de consumo inferior a un dólar en un período posterior. Si los gastos de consumo esperados en la fecha de mercado t fueran 10.000 dólares y en la τ^a solamente de un dólar, $\eta_{t\tau}$ sería casi seguramente negativa. Las relaciones subjetivas de preferencia temporal del consumidor se obtienen a partir de su función de consumo-utilidad y dependen de los niveles de sus gastos de consumo. Son independientes de los tipos de interés del mercado y de sus oportunidades crediticias.

El plan de consumo. — *Usando como variables los gastos de consumo* del sujeto puede reformularse el problema de la maximización de utilidad del consumidor, de la Sección 8-2. El consumidor desea maximizar el *nivel de su índice de consumo-utilidad (8-10) sujeto* a la ecuación de balance de su tiempo de vida. Formemos la función

$$V^* = V(c_1, \ldots, c_T) + \mu \sum_{t=1}^{T} (y_t - c_t)(1 + \xi_{1t})^{-1}$$

e igualemos a cero sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial V^*}{\partial c_t} = V_t - \mu (1 + \xi_{1t})^{-1} = 0 \qquad (t = 1, \ldots, T)$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial \mu} = \sum_{t=1}^{T} (y_t - c_t)(1 + \xi_{1t})^{-1} = 0 \qquad (8\text{-}12)$$

y

$$-\frac{\partial c_\tau}{\partial c_t} = \frac{(1 + \xi_{1t})^{-1}}{(1 + \xi_{1\tau})^{-1}} = (1 + \xi_{t\tau}) \qquad (t, \tau = 1, \ldots, T)$$

$$(\tau > t) \qquad (8\text{-}13)$$

[illegible]tituyendo en (8-1a) y (8-11),

$$\eta_{t\tau} = \xi_{t\tau} \qquad (t, \tau = 1, \ldots, T) \qquad (\tau > t) \tag{8-14}$$

En este caso el consumidor ajusta sus preferencias subjetivas a sus oportunidades en el mercado, igualando su relación de preferencia temporal entre cada par de períodos al tipo correspondiente de rendimiento del mercado. Si $\eta_{t\tau}$ fuese menor que $\xi_{t\tau}$, el consumidor compraría títulos y [illegible] un premio mayor del necesario para mantenerla indiferente. [illegible] fuese mayor que $\xi_{t\tau}$ podría aumentar su satisfacción vendiendo [illegible] y aumentando su consumo en el período t a expensas del del pe[illegible]. Aunque $\eta_{t\tau}$ puede ser negativo para algunas formas de gasto [illegible]umo, si los tipos de interés son positivos, los valores observados [illegible]) de $\eta_{t\tau}$ serán siempre positivos.

Las condiciones de segundo grado requieren que los menores principales del Hessiano relevante alternen de signo:

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & -1 \\ V_{21} & V_{22} & -(1+\xi_{12})^{-1} \\ -1 & -(1+\xi_{12})^{-1} & 0 \end{vmatrix} > 0;$$

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & -1 \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} & -(1+\xi_{12})^{-1} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} & -(1+\xi_{13})^{-1} \\ -1 & -(1+\xi_{12})^{-1} & -(1+\xi_{13})^{-1} & 0 \end{vmatrix} < 0; \ldots \tag{8-15}$$

[illegible] puede darse cuenta que las condiciones de segundo grado im[illegible] que los tipos de preferencia temporal sean decrecientes.

Como ejemplo numérico consideremos el caso de un consumidor [illegible] con un horizonte de dos períodos. Supongamos que su función de utilidad es $U = c_1 c_2$ y que sus rentas actuales y esperadas son $(y_1 = 10.000, y_2 = 5250)$. Formemos la función

$$V^* = c_1 c_2 + \mu\,[(10.000 - c_1) + (5.250 - c_2)(1 + i_1)^{-1}]$$

Igualemos a cero sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial V^*}{\partial c_1} = c_2 - \mu = 0$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial c_2} = c_1 - \mu\,(1 + i_1)^{-1} = 0$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial \mu} = (10.000 - c_1) + (5.250 - c_2)(1 + i_1)^{-1} = 0$$

Si el tipo de interés es 0,05 (5 %), los gastos de consumo óptimos son $c_1 = 7500$ y $c_2 = 7875$. El tipo de preferencia temporal del consumidor, para estos gastos, es igual al tipo de interés (rendimiento del mercado):

$$\eta_{12} = -\frac{dc_2}{dc_1} - 1 = \frac{c_2}{c_1} - 1 = \frac{7.875}{7.500} - 1 = 0,05$$

Las condiciones de segundo grado requieren que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -(1+i_1)^{-1} \\ -1 & -(1+i_1)^{-1} & 0 \end{vmatrix} = 2\,(1+i_1)^{-1} > 0$$

que se satisface para $i_1 > -1$.

El caso del horizonte biperiódico se puede describir gráficamente dando una interpretación nueva al diagrama convencional de las

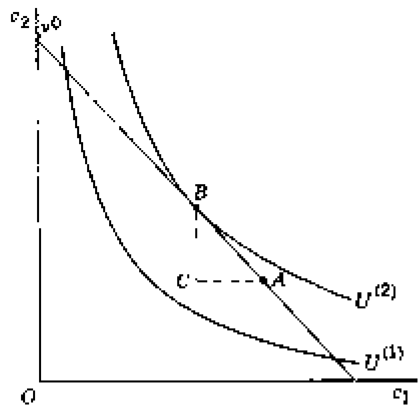


FIGURA 8-1

curvas de indiferencia. En la figura (8-1), las coordenadas del punto A indican el flujo de renta ganada del consumidor. Sea y^0 la línea recta

$$y^0 - c_1 - c_2\,(1 + i_1)^{-1} = 0$$

con pendiente negativa igual a la relación de cambio del mercado, $(1 + i_1)$, entre los gastos de consumo en la primera y segunda fechas de mercado. Si el consumidor presta al tipo de interés del mercado, un dólar de renta en la primera fecha se puede transformar en $(1 + i_1)$ dólares de gasto de consumo en la segunda. Igualmente, si el consumidor obtiene préstamos al tipo de interés de mercado, $(1 + i_1)$ dólares de renta en la segunda fecha, se pueden transformar en un dólar de gasto de consumo en la primera. Supongamos que la ecuación de balance del consumidor viene dada por la línea y^0 en la figura 8-1. Si el consumidor solicita y obtiene prestamos en la primera fecha de mercado, se moverá a lo largo de su línea de balance hacia la derecha del punto A. Si presta se moverá a lo largo de su línea de balance hacia la izquierda de dicho punto.

Las curvas continuas $U^{(1)}$ y $U^{(2)}$ pertenecen a la familia de curvas de indiferencia temporal. Cada una de ellas es el lugar geométrico de los gastos de consumo que proporcionan un determinado nivel de satisfacción. La pendiente de una curva de indiferencia temporal es $-(1+r_{12})$. Estas curvas reflejan el supuesto de que el tipo de preferencia temporal es decreciente, o sea: las curvas son convexas respecto al origen tal como requiere la condición de segundo grado (8-15). Las coordenadas del punto de tangencia B indican los gastos óptimos de consumo. En la primera fecha de mercado el consumidor comprará títulos por un valor de AC dólares, y en la segunda gastará el principal e intereses, CB, en bienes de consumo.

Efectos sustitución y renta. — Siguiendo métodos parecidos a los de la Sección 2-6, los efectos de un cambio del tipo de interés sobre los niveles de consumo óptimo del consumidor pueden descomponerse en los efectos renta y sustitución.

Supongamos que el horizonte del consumidor comprende dos fechas de mercado. Para determinar los efectos de cambios en el tipo de interés y en los niveles de renta ganada, diferenciemos totalmente las condiciones de primer grado (8-12) para $T = 2$:

$$\begin{aligned}
&V_{11}\,dc_1 + V_{12}\,dc_2 - d\mu = 0\\
&V_{21}\,dc_1 + V_{22}\,dc_2 - (1+i_1)^{-1}\,d\mu = -\mu\,(1+i_1)^{-2}\,di_1\\
&-dc_1 - (1+i_1)^{-1}\,dc_2 - 0 = -dy_1 - (1+i_1)^{-1}\,dy_2\\
&\qquad\qquad + (y_2 - c_2)\,(1+i_1)^{-2}di_1
\end{aligned} \tag{8-16}$$

La distribución de coeficientes de los términos de la izquierda de (8-16) es la misma que la del último (y para $T = 2$, el único) Hessiano orlado de (8-15).

Hallando el valor de dc_1 en (8-16) por la regla de Cramer,

$$dc_1 = -\mu(1+i_1)^{-2}\frac{\mathbf{D}_{21}}{\mathbf{D}}\,di_1 + [-dy_1 - (1+i_1)^{-1}\,dy_2 + (y_2 - c_2)\,(1+i_1)^{-2}\,di_1]\,\frac{\mathbf{D}_{31}}{\mathbf{D}} \tag{8-17}$$

8-4. Producción multiperíodo

La teoría de la empresa puede también extenderse al caso multiperíodo. El análisis del empresario es similar al del consumidor.

LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN MULTIPERIODO. — La producción es rara vez instantánea. Generalmente entre la aplicación de los inputs y la obtención de los outputs transcurre algún tiempo. Supongamos que 1.° el empresario compra inputs y vende outputs solamente en las fechas de mercado que alcanza a prever; 2.° que realiza las operaciones técnicas del proceso de producción durante el tiempo que transcurre entre las fechas de mercado; 3.° que durante el período t^o, utiliza los inputs adquiridos en la fecha de mercado t^o, y 4.° que en la fecha de mercado $(t+1)^o$ vende los outputs obtenidos durante el período t^o. Estos supuestos sirven para definir la secuencia temporal de la producción. El análisis que sigue podría basarse en otras muchas series alternativas de supuestos de secuencia temporal sin que sus resultados sufrieran alteraciones considerables.

Consideremos a un empresario que desea formular un plan óptimo de producción que *abarca L períodos completos* y *(L + 1) fechas de* mercado. Siguiendo la notación de la Sección 3-6, la función de producción del empresario puede representarse en forma implícita por

$$F(q_{12}, \ldots, q_{s,L+1}, q_{s+1,1}, \ldots, q_{mL}) = 0 \qquad (8\text{-}22)$$

donde q_{jt} $(j = 1, \ldots, s)$ $(t = 2, \ldots, L + 1)$ es la cantidad del output j^o obtenido durante el período $(t - 1)$ y vendido en la fecha de mercado t^o, y $-q_{jt}$ $(j = s + 1, \ldots, m)$ $(t = 1, \ldots, L)$ es la cantidad del input j^o adquirido en la fecha de mercado t^o y aplicado al proceso de producción durante el período t^o. Cualquiera de los outputs que el empresario pueda vender en la fecha de mercado inicial, son el resultado de decisiones de producción pasadas, y sus niveles se registran en (8-22) más como constantes que como variables. En la fecha de mercado $(L + 1)^o$ el empresario planea vender los outputs obtenidos durante el período L, pero no planea adquirir inputs, ya que no anticipa la producción en ningún período ulterior a L. La función de producción multiperíodo relaciona los niveles de input y output de *todos los períodos dentro del* horizonte de planificación del empresario. Los inputs utilizados en cada período, contribuyen a la producción de outputs en todos los períodos, y normalmente es imposible atribuir un output determinado a los inputs aplicados durante un período específico. Sin embargo, es posible averiguar, los efectos de las variaciones marginales y computar las productividades marginales de cada output aplicado en cada período con respecto de cada output obtenido en cada período.

MAXIMIZACIÓN DEL BENEFICIO. — Igualmente, el empresario se halla frente a un mercado crediticio de competencia perfecta y es libre de recibir créditos y de prestar en las mismas condiciones que los consumidores. Dadas estas oportunidades, el empresario generalmente deseará maximizar el valor actual de los ingresos netos de su producción sujeto a las restricciones técnicas impuestas por su función de producción. Formemos la función

$$\pi^* = \sum_{t=1}^{L+1} \sum_{j=1}^{m} p_{jt} q_{jt} (1 + \xi_{1t})^{-1} + \lambda F(q_{12}, \ldots, q_{mL})$$

Igualemos a cero sus derivadas parciales

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial q_{jt}} = p_{jt}(1 + \xi_{1t})^{-1} + \lambda \frac{\partial F}{\partial q_{jt}} = 0$$

$$(t = 2, \ldots, L + 1) \quad \text{para } (j = 1, \ldots, s)$$
$$(t = 1, \ldots, L) \quad \text{para } (j = s + 1, \ldots, m)$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \lambda} = F(q_{12}, \ldots, q_{mL}) = 0$$

$$-\frac{\partial q_{jt}}{\partial q_{k\tau}} = \frac{\partial F/\partial q_{k\tau}}{\partial F/\partial q_{jt}} = \frac{p_{k\tau}(1 + \xi_{1\tau})^{-1}}{p_{jt}(1 + \xi_{1t})^{-1}}$$

$$(t, \tau = 2, \ldots, L + 1) \quad \text{para } (j, k = 1, \ldots, s) \qquad (8\text{-}23)$$
$$(t, \tau = 1, \ldots, L) \quad \text{para } (j, k = s + 1, \ldots, m)$$

Si Q_j y Q_k son outputs, (8-23) exige que la relación de transformación de productos (*RTP*) sea igual a la relación de sus precios descontados. Si son inputs, exige que la relación técnica de sustitución (*RTS*) sea igual a la razón de sus precios descontados. Si Q_j es un output, hagamos $x_{k\tau} = -q_{k\tau}$ y $r_{k\tau} = p_{k\tau}$ y escribamos (8-23) en la forma,

$$\frac{\partial q_{jt}}{\partial x_{k\tau}} p_{jt}(1 + \xi_{1t})^{-1} = r_{k\tau}(1 + \xi_{1\tau})^{-1}$$

$$(j = 1, \ldots, s) \qquad (k = s + 1, \ldots, m)$$
$$(t = 2, \ldots, L + 1) \quad (\tau = 1, \ldots, L)$$

El valor descontado del producto marginal de X_k, aplicado durante el período τ^v, con respecto a cada output en cada período de tiempo, debe igualarse al precio descontado de X_k en la fecha de mercado τ^a.

Si en todas las fechas de mercado se define cada output e input como una *variable específica y los precios son reemplazados por precios descontados*, las condiciones de segundo grado son las mismas que las expuestas en la Sección 3-6. Suponiendo que los tipos de interés permanezcan inalterados, pueden derivarse los efectos sustitución para cambios en cada uno de los precios descontados.

Un empresario no emprendería una producción de un solo período si todos los inputs fueran variables y su beneficio máximo fuera negativo. En el caso multiperíodo se puede aplicar una limitación similar. Si todos los inputs son variables, el empresario no emprenderá ninguna producción si el valor descontado de los ingresos netos resultantes de sus operaciones son negativos. Sin embargo, esta restricción no tiene en cuenta todas las opciones a que tiene acceso el empresario. En efecto, puede suceder que encuentre muy beneficioso emprender la producción, pero cesándola antes del final de su horizonte de planificación. El empresario no operará después de la *fecha de mercado* τ^a, *a menos que el* valor actual de los ingresos netos adicionales no sea negativo:

$$\sum_{t=\tau+1}^{L+1} \sum_{j=1}^{s} p_{jt} q_{jt} (1+\xi_{1t})^{-1} - \sum_{t=\tau}^{L} \sum_{j=s+1}^{m} r_{jt} x_{jt} (1+\xi_{1t})^{-1} \geq 0 \qquad (\tau = 1, \ldots, L) \qquad (8\text{-}24)$$

Si (8-24) no se cumple para algún valor de τ, el empresario puede ganar *más invirtiendo todo su capital en títulos, en la fecha de mercado* τ^a, que continuando la producción. Si (8-24) no se cumple para $\tau = 1$, no emprenderá la producción.

Las funciones de demanda y oferta pueden derivarse de manera similar a la usada en la Sección 8-1 para derivar las funciones de demanda del consumidor. Las demandas de inputs, ofertas de outputs, y demanda de títulos en cada fecha de mercado, por parte del empresario, pueden expresarse en función de todos los precios y tipos de interés. Con respecto a todos los precios de inputs y outputs, las funciones de demanda de inputs y las de oferta de outputs son homogéneas de grado cero y las funciones de demanda de títulos homogéneas de grado uno.

8-5. La teoría de la inversión de la empresa

En la Sección 8-4 se han expuesto de manera muy general las decisiones de la producción multiperíodo de la empresa. Las ventajas e inconvenientes de esta formulación son similares a las del análisis del consumo multiperíodo hecho en la Sección 8-2. Las relaciones formales entre las decisiones de producción mono y multiperiódicas son obvias, pero esta formulación oscurece muchos de los nuevos problemas que surgen con la aparición del tiempo y de los tipos de interés. En esta sección se emplean supuestos simplificadores, similares a los empleados en la Sección 8-3, a fin de trasladar a primer plano los nuevos problemas y de derivar algunos de los conceptos y resultados de la teoría neoclásica de la inversión. Concretamente, se da por supuesto que los empresarios consideran conocidos y constantes, todos los precios vigentes y esperados de inputs y outputs, y que realizan algunas optimizaciones preliminares. Es, como consecuencia, posible tratar como variables únicas los gastos en inversiones y los ingresos por ventas en cada una de las fechas de mercado que se hallan dentro de horizonte del empresario, y circunscribir el análisis a una investigación de sus relaciones mutuas y de los efectos de los tipos de interés.

Algunos casos especiales han jugado un papel importante en el desarrollo de la teoría microeconómica de la inversión. Los casos se distinguen frecuentemente sobre la base de las estructuras temporales de inputs y outputs. El caso más simple es el de *punto-input-punto-output*, que describe la inversión en capital circulante: todos los inputs se compran en una fecha de mercado y, en la siguiente, se venden todos los outputs. El cultivo y explotación de arboledas y la producción de vino sirven a menudo como ejemplos. El caso de multipunto-input-punto-output describe la producción de un output que requiere la aplicación de inputs durante un número de períodos sucesivos.[4] La construcción naval podría entrar en esta categoría. El caso de punto input-multipunto output describe la inversión en un bien duradero, que se adquiere en una fecha de mercado y se utiliza para la producción de outputs durante un número de períodos sucesivos. Finalmente existe el caso general de multipunto input-multipunto output. Naturalmente el cuarto caso comprende los tres primeros. En la sección que nos ocupa, nuestra atención estará dirigida solamente al caso general y al de punto input-punto output.

4. Si se considera al tiempo como variable continua, la palabra *continua* reemplaza a la de *multi-punto* en las denominaciones de los datos especiales.

La función de oportunidades de inversión. — El gasto de inversión del empresario, en la fecha de mercado t^a, I_t, es igual al valor de sus adquisiciones de inputs en esa fecha:

$$I_t = -\sum_{j=s+1}^{m} p_{jt} q_{jt} \qquad (t = 1, \ldots, L) \tag{8-25}$$

Su ingreso total por ventas en la fecha de mercado t^a, I_t es de

$$I_t = \sum_{j=1}^{s} p_{jt} q_{jt} \qquad (t = 2, \ldots, L + 1) \tag{8-26}$$

Las definiciones (8-25) y (8-26) comprenden $2L$ ecuaciones.

Supongamos que un empresario tiene dados los niveles de todos sus inputs y outputs salvo los inputs que adquiere en la fecha de mercado t^a, y que desea minimizar el valor actual de sus gastos de inversión en esa fecha. Para solucionar su problema de minimización condicionada formemos la función

$$I_t^* = -\sum_{j=s+1}^{m} p_{jt} q_{jt} (1 + \xi_{1t})^{-1} + \lambda^* F(q_{12}^0, \ldots, q_{s,L+1}^0, q_{s+1,1}^0, \ldots, q_{s+1,t}, \ldots, q_{s+2,t}, \ldots, q_{mL}^0)$$

e igualemos a cero sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial I_t^*}{\partial q_{jt}} = -p_{jt}(1 + \xi_{1t})^{-1} + \lambda^* \frac{\partial F}{\partial q_{jt}} = 0 \qquad (j = s + 1, \ldots, m)$$

$$\frac{\partial I_t^*}{\partial \lambda^*} = F(q_{12}^0, \ldots, q_{s,L+1}^0, q_{s+1,1}^0, \ldots, q_{s+1,t}, \ldots, q_{s+2,t}, \ldots, q_{mL}^0) = 0$$

y

$$-\frac{\partial q_{jt}}{\partial q_{kt}} = \frac{p_{kt}}{p_{jt}} \qquad (j, k = s + 1, \ldots, m) \tag{8-27}$$

Las condiciones de primer grado son las ya vistas para la minimización condicionada del coste en un solo período (véase la Sección 3-2): las RTS se igualan a las razones de los precios. Las RTS intraperiódicas óptimas son independientes de los tipos de interés. Se da por supuesto que en la fecha de mercado t^a el empresario distribuye sus gastos de inversión de modo que se verifique (8-27). Las condiciones de (8-27) contienen $(m - s - 1)$ ecuaciones independientes para cada fecha de mercado o sea un total de $L(m - s - 1)$ ecuaciones independientes.

Supongamos ahora que se le fijan al empresario los niveles de sus inputs o outputs excepto los outputs que vende en la fecha de mercado t^a, y que desea maximizar el valor actual de sus ingresos por ventas en esa fecha. Las condiciones de primer grado para este problema de maximización condicionada requieren que

$$-\frac{\partial q_{jt}}{\partial q_{kt}} = \frac{p_{kt}}{p_{jt}} \qquad (j, k = 1, \ldots, s) \tag{8-28}$$

Las *RTP* óptimas de los outputs vendidos en una fecha de mercado dada, son también constantes e independientes de los tipos de interés. Se supone que el empresario orienta siempre su producción de modo que se cumpla (8-28). Las condiciones (8-28) contienen un total de $L(s-1)$ ecuaciones independientes.

La función de oportunidades de inversión del empresario se construye con los supuestos siguientes: el empresario, 1.º satisface su función de producción multiperiódica; 2.º iguala sus RTS intraperíodo a las razones fijas de los precios de sus inputs, y 3.º iguala sus *RTP* intraperiódicas a las razones fijas de los precios de sus outputs. Por tanto sus oportunidades de inversión están descritas por su función de producción (8-22) y las ecuaciones (8-25) a (8-28). El sistema en conjunto, contiene $(Lm + 1)$ ecuaciones independientes y $(Lm + 2L)$ variables. Por regla general es posible usar Lm de las ecuaciones para eliminar las Lm q_{jt}. Los ingresos y los gastos en inversiones quedan entonces relacionados por una sola función implícita:

$$H(I_1, \ldots, I_L, I_2, \ldots, I_{L+1}) = 0 \tag{8-29}$$

Dados todos los ingresos y todos los gastos de inversiones menos uno, (8-29) da el valor mínimo del gasto de inversión restante. De modo parecido, dados todos los ingresos menos uno y todos los gastos de inversiones, (8-29) da el valor máximo del ingreso restante.

El empresario posee oportunidades de inversión, internas y externas: puede adquirir títulos y puede invertir en su propia empresa. Sus rendimientos externos son los mismos que los de los consumidores, dados por (8-1). En el caso general, los rendimientos medios internos no pueden definirse de modo paralelo a los tipos medios de rendimiento del mercado, puesto que no es posible atribuir todo el ingreso habido en la fecha de mercado τ^a a la inversión de una fecha de mercado determinada. Cada ingreso depende de todos los gastos de inversión. Sin embargo, si se supone que las otras inversiones e ingresos permanecen inalterados, se pueden definir los rendimientos marginales internos para cada uno de los pares inversión-ingreso. El rendimiento marginal interno[5] de la inversión en una fecha de mercado t^a, con respecto al ingreso de la fecha indicada por τ, $\rho_{t\tau}$, es

$$\rho_{t\tau} = \frac{\partial I_\tau}{\partial \mathbf{I}_t} - 1 = -\frac{\partial H/\partial \mathbf{I}_t}{\partial H/\partial I_\tau} - 1$$
$$(t = 1, \ldots, L) \qquad (\tau = 2, \ldots, L+1) \tag{8-30}$$

Cada uno de los rendimientos marginales internos depende de los niveles de todos ingresos y de los gastos de inversión planeados.

Las funciones del rendimiento marginal interno dadas en (8-30) son independientes de los tipos de interés del mercado y de las oportunidades de préstamos y créditos del empresario. Para expectativas dadas de precios de input y output (8-30) proporciona una descripción en términos marginales del marco técnico objetivo dentro del cual opera el empresario. Para algunas combinaciones de inversión e ingresos $\rho_{t\tau}$ *puede ser negativa*

El plan de inversión. — El problema de maximización del empresario, de la Sección 8-4, puede expresarse ahora en términos de gastos de inversión e ingresos. De la serie de flujos de inversión e ingreso que satisfacen el empresario (8-29) desea escoger uno que maximice el valor presente de su flujo de ingreso neto. Formemos la función

$$\pi^* = \sum_{t=2}^{L+1} I_t (1 + \xi_{1t})^{-1} - \sum_{t=1}^{L} \mathbf{I}_t (1 + \xi_{1t})^{-1} + \mu H (\mathbf{I}_1, \ldots, I_{L+1})$$

e igualemos a cero las derivadas parciales:

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial I_t} = (1 + \xi_{1t})^{-1} + \mu \frac{\partial H}{\partial I_t} = 0 \qquad (t = 2, \ldots, L+1)$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{I}_t} = -(1 + \xi_{1t})^{-1} + \mu \frac{\partial H}{\partial \mathbf{I}_t} = 0 \qquad (t = 1, \ldots, L)$$

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial \mu} = H (\mathbf{I}_1, \ldots, I_{L+1}) = 0$$

5. Para este concepto no existe una denominación generalmente aceptada. Friedrich Lutz y Vera Lutz, en *The theory of investment of the firm* (Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1951), emplean "tipo de rendimiento marginal interno". Irving Fisher en *The theory of interest* (New York: Kelly and Millman, 1954) usa "tipo de rendimiento marginal sobre el coste". Otras denominaciones para estos conceptos, u otros muy similares, son "productividad marginal de la inversión", "eficacia marginal de la inversión" y "eficacia marginal del capital".

en donde $\mu < 0$.[6] Sustituyendo de (8-30), las condiciones de primer grado requieren que

$$\rho_{t\tau} = \xi_{t\tau} \qquad \begin{matrix}(t = 1, \ldots, L) \\ (\tau = 2, \ldots, L+1)\end{matrix} \tag{8-31}$$

El empresario debe igualar cada uno de sus rendimientos marginales internos al correspondiente rendimiento de mercado.

$$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_1 \\ H_{21} & H_{22} & H_2 \\ H_1 & H_2 & 0 \end{vmatrix} < 0; \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_1 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_2 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 & 0 \end{vmatrix} < 0; \ldots \tag{8-32}$$

donde H_j es la derivada parcial de primer orden de la función implícita (8-29) con respecto a la variable j^a, y H_{jk} es la derivada parcial de segundo grado con respecto a las variables j y k. Todos estos determinantes deben ser negativos.[7] Estas condiciones deben cumplirse independientemente del orden en que se dispongan las $2L$ inversiones e ingresos.

Desarrollando el primer determinante de (8-32),

$$2\, H_1\, H_2\, H_{12} - H_{22}\, H_1^2 - H_{11}\, H_2^2 < 0 \tag{8-33}$$

La relación de variación del rendimiento marginal interno de la inversión en la fecha de mercado t^a con respecto al ingreso de la τ^a es

$$\frac{\partial \rho_{t\tau}}{\partial I_t} = \frac{\partial^2 I_\tau}{\partial I_t^2} = -\frac{1}{H_2^3}\,(H_{11}\, H_2^2 - 2\, H_{12}\, H_1\, H_2 + H_{22}\, H_1^2)$$

donde $H_1 = \partial H/\partial I_t$ y $H_2 = \partial H/\partial I_\tau$. Al tener que cumplirse (8-33) para las variables ordenadas en este orden y al ser $H_2 > 0$ (8-33) implica que

$$\frac{\partial \rho_{t\tau}}{\partial I_t} < 0 \quad \begin{matrix}(t = 1, \ldots, L) \\ (\tau = 2, \ldots, L+1)\end{matrix} \tag{8-34}$$

6. Las condiciones de primer grado requieren que $\partial H/\partial I_t$ y $\partial H/\partial I_\tau$ sean de signo contrario. Se supone que la función de oportunidades de inversión está construida de tal modo que en el plan de producción óptimo $\partial H/\partial I_t > 0$ y $\partial H/\partial I_\tau < 0$. Si se obtuviera una solución con los signos cambiados, sólo sería necesario volver a redefinir (8-29) como $-H$ para obtener la forma deseada.

7. Las condiciones de segundo grado requieren que los menores principales del Hessiano de las derivadas de segundo grado de π^* orladas por las derivadas de primer grado de $H(I_1, \ldots, I_{L+1})$ sean de signo alternativamente positivas y negativas. Las condiciones (8-32) se obtienen sacando factor común $\mu < 0$.

Así, las condiciones de segundo grado implican que todos los rendimientos marginales internos son decrecientes.

Si las condiciones (8-31) y (8-34) no se cumplieran, el empresario podría incrementar el valor actual de su beneficio ya sea vendiendo títulos y ampliando la inversión interna ya adquiriéndolos y restringiendo dicha inversión.

Punto input-punto output. — En el caso más simple, el empresario invierte en una fecha de mercado y percibe el ingreso resultante en la siguiente. En el transcurso del tiempo puede repetir el proceso de producción, pero su producción en la primera fecha de mercado sólo afecta al ingreso de la segunda, y su horizonte de planificación efectivo incluye un período completo y dos fechas de mercado.

Generalmente, el ingreso del empresario se puede formular como función explícita de sus gastos de inversión:

$$I_2 = h(\mathbf{I}_1) \tag{8-35}$$

En este caso especial es posible atribuir todos los ingresos de la segunda fecha de mercado a la inversión en la primera, y como consecuencia es posible definir un tipo interno de rendimiento medio:

$$\frac{I_2 - \mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{h(\mathbf{I}_1)}{\mathbf{I}_1} - 1$$

El tipo interno de rendimiento medio puede compararse con el correspondiente tipo de rendimiento del mercado i_1.

El empresario desea maximizar el valor presente de los ingresos netos de su actuación.

$$\pi = I_2 (1 + i_1)^{-1} - \mathbf{I}_1$$

Sustituyendo de (8-35), π puede formularse como función de $\mathbf{I}_1$ solamente: [8]

$$\pi = h(\mathbf{I}_1)(1 + i_1)^{-1} - \mathbf{I}_1$$

Diferenciando,

$$\frac{d\pi}{d\mathbf{I}_1} = h'(\mathbf{I}_1)(1 + i_1)^{-1} - 1 = 0 \tag{8-36}$$

8. La sustitución directa y el uso del multiplicador de Lagrange son alternativas equivalentes. Maximizando se obtiene el mismo resultado

$$\pi^* = I_2 (1 + i_1)^{-1} - \mathbf{I}_1 + \mu [I_2 - h(\mathbf{I}_1)]$$

(véase Sec. A-3).

Ordenando términos y sustituyendo de (8-1) y (8-30), la condición de primer grado se transforma en

$$\rho_{12} = i_1 = \xi_{12}$$

El empresario iguala su tipo marginal de rendimiento interno al correspondiente tipo de rendimiento del mercado — en este caso el tipo de interés del mercado.

La condición de segundo grado requiere que

$$\frac{d^2\pi}{dI_1^2} = h''(I_1)(1 + i_1)^{-1} < 0$$

y si $i_1 > -1$,

$$h''(I_1) < 0 \tag{8-37}$$

El tipo marginal de rendimiento interno debe ser decreciente.

Imaginemos que se verifica (8-37), pero que $\rho_{12} > \xi_{12}$. El rendimiento marginal de los préstamos para uso interno excede su coste de interés,

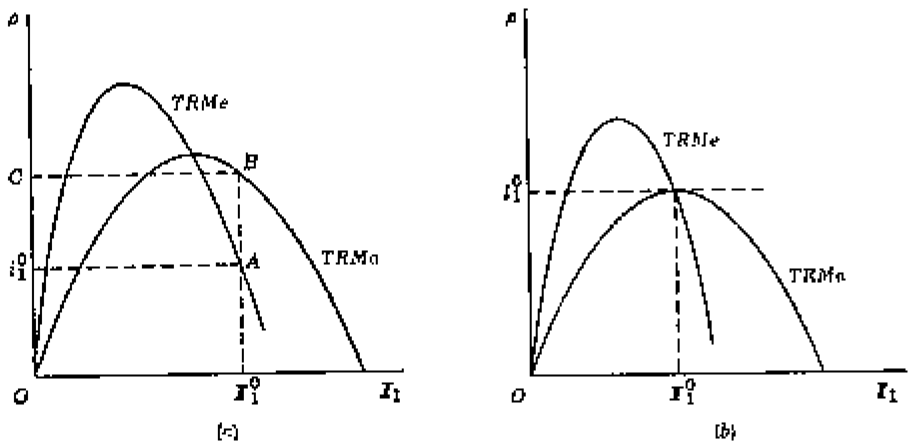


FIGURA 8-2

y por ello el empresario puede aumentar su beneficio ampliando la inversión. Por el contrario, si $\rho_{12} < \xi_{12}$, el rendimiento de cada dólar marginal de inversión interna es menor que el coste que ha de pagar por él, y, por tanto, el empresario puede aumentar su beneficio contrayendo la inversión.

Por diferenciación total de (8-36),

$$h''(I_1)\, dI_1 = di_1$$

y
$$\frac{dI_1}{di_1} = \frac{1}{h''(I_1)} < 0 \qquad (8\text{-}38)$$

Si se verifica la condición de segundo grado, (8-38) es negativa; un aumento en el tipo de interés obligará al empresario a reducir su gasto en inversión.

En la figura 8-2*a* se representan las formas posibles de las funciones de rendimiento medio o marginal internos, *TRMe* y *TRMa* respectivamente. Ambos, los tipos de rendimiento medio y marginal son crecientes, alcanzan un máximo y luego disminuyen cuando la inversión aumenta. Estas curvas poseen las propiedades normales de los pares medio y marginales (véase Sección A-2). Si el tipo de interés es i_1^0, el empresario invertirá I_1^0 dólares. Para este nivel de inversión, el tipo interno de rendimiento marginal y el tipo de rendimiento del mercado son iguales (condición de segundo grado). El coste total de los intereses del empresario viene dado por el área $OI_1^0\ Ai_1^0$ su rendimiento por $OI_1^0\ BC$, y su rendimiento neto por $i_1^0\ ABC$.

En un sistema perfectamente competitivo, el rendimiento neto de la empresa representativa en cada industria tenderá hacia cero desde un nivel positivo o negativo previo debido a la entrada (o salida) de empresas en la industria. El equilibrio a largo plazo en un sistema competitivo se representa en la figura 8-2*b*. La inversión óptima de la empresa representativa es I_1^0. Los tipos de rendimiento interno medio y marginal son iguales, y el tipo de rendimiento medio interno se iguala ahora al tipo de interés.

8-6. Determinación del tipo de interés

Para el análisis del equilibrio del mercado de títulos del mercado crediticio, es posible utilizar los métodos de los Capítulos 4 y 5, y la determinación del tipo de interés puede incluirse dentro del proceso general de formación de los precios. Cuando se considera que el bien que se intercambia no son títulos sino fondos prestables el análisis tiene una mayor analogía con los ya estudiados del equilibrio del mercado.[9] Una demanda de (oferta de) títulos es equivalente a una oferta de (demanda de) fondos prestables. El tipo de interés es el precio de uso de

9. En el presente análisis se supone que no existe dinero circulante. El poder general de compra expresado en términos de dinero de cuenta está representado por fondos prestables.

fondos prestados durante un periodo específico de tiempo. Por convención, los tipos de interés, se expresan como proporciones de las cantidades recibidas a crédito, pero pueden expresarse en términos de dinero de cuenta como los demás precios. Hagamos que la unidad de poder adquisitivo sea 100 dólares. Un tipo de interés de i_t es entonces el equivalente de un precio de $100i_t$ dólares por unidad de poder adquisitivo.

Consideremos, en primer lugar, el análisis de equilibrio parcial del mercado de fondos prestables. De las condiciones de equilibrio individual, derivadas de las Secciones 8-3 y 8-5, los excesos de demanda de fondos prestables de cada consumidor y empresario pueden expresarse como función de los tipos de interés corrientes y esperados. Es más conveniente utilizar funciones de exceso de demanda que funciones de demanda y oferta, ya que los consumidores y empresarios individuales pueden demandar fondos prestables a un tipo de interés y ofrecerlos a otro.

Antes de que se pueda determinar el equilibrio del mercado es necesario formular una teoría de las expectativas sobre el tipo de interés. Pueden utilizarse varias y distintas teorías de expectativas. Una de ellas consiste en suponer que los individuos esperan que los tipos futuros de interés estarán a niveles fijos prescindiendo de cuál sea el tipo de interés actual; en este caso, los tipos de interés futuros entran en las funciones corrientes de exceso de demanda como constantes y no como variables. Otra posibilidad es la expectativa de que los tipos futuros de interés serán iguales al tipo de interés corriente: $i_1 = i_2 = i_3 \ldots$. Otra posibilidad incluso es la expectativa de que el cambio absoluto registrado actualmente por el tipo de interés se realizará en el futuro: $i_1 - i_0 = i_2 - i_1 = i_3 - i_2 = \ldots$, en general, $i_t = ti_1 - (t-1)i_0$. Cada uno de estos supuestos acerca de las expectativas permite expresar las funciones de exceso de demanda individuales como funciones exclusivas del tipo de interés corriente. La función agregada de exceso de demanda se construye sumando las funciones individuales. Como las funciones de exceso de demanda individuales se transforman en funciones del tipo de interés actual antes de la agregación, no es preciso que todos los individuos planeen para horizontes de la misma dimensión. El tipo de interés corriente de equilibrio. es aquel para el que el exceso de demanda corriente, actual, de fondos prestables es igual a cero.

La teoría del equilibrio del multimercado del capítulo 5 puede igualmente generalizarse para incluir el tipo de interés y las expectativas multiperiódicas. En este caso es necesario introducir teorías sobre las expectativas del tipo de interés y de los precios para que los excesos de demanda individuales de cada producto y de fondos prestables puedan expresarse como función solamente de los precios corrientes y del tipo de interés corriente.[10] El equilibrio del multimercado se determina entonces por la exigencia de que los excesos de demanda de cada producto y de fondos prestables sean simultáneamente iguales a cero.

La formulación de los requisitos matemáticos para casos específicos de equilibrios de un solo mercado y del multimercado se deja para ejercicio del lector.

8-7. Resumen

A los consumidores y empresarios se les supone con libre acceso a un mercado crediticio perfectamente competitivo con lo que pueden ajustar en el tiempo sus flujos rentas y gastos, mediante la solicitud de créditos (vendiendo títulos) y concesión de préstamos (comprando títulos). El tipo de interés expresa el coste del crédito, o la renta del préstamo, durante un período, en proporción de la cantidad del crédito o del préstamo. Los tipos de rendimiento del mercado de duración superior a un período, se definen como una combinación de los tipos de interés que unen pares de períodos sucesivos. Los tipos de descuento se definen como los recíprocos de los correspondientes tipos rendimiento del mercado. Es factible reducir toda una corriente de renta o gasto a un solo número, su valor presente, multiplicando cada uno de sus elementos por el tipo apropiado de descuento y sumando los resultados.

El índice de utilidad del consumidor se define como función de las cantidades de n productos que consume en cada uno de los T períodos dentro de su horizonte de planificación. El consumidor desea maximizar el nivel de este índice sujeto a la restricción de su ecuación de balance de su período de vida, que requiere la igualdad de los valores presentes de sus corrientes de consumo y de renta ganada. Las condiciones de primer grado requieren que iguale las RSC intraperiódicas e interperiódicas a las razones de los precios descontados de los productos. Las condiciones de segundo grado se derivan de aquellas del análisis de n productos y un solo período. Las demandas de productos, presente y planeadas, del consumidor, son funciones de todos los precios corrientes y esperados y de los tipos de interés, y son homogéneos de grado cero con respecto a todos los precios y rentas recibidas. Sus demandas de

10. Para una teoría concreta de las expectativas de precios véase. J. R. Hicks, *Value and Capital* (2.ª ed.; Oxford: Clarendon Press, 1946), cap. XVI.

títulos son funciones de las mismas variables pero son homogéneas de grado uno con respecto a todos los precios y rentas ganadas.

Si damos por supuesto que los precios permanecen inalterados, el índice de utilidad del consumidor puede expresarse como función de sus gastos de consumo. El tipo de preferencia temporal del consumidor a consumir en el período t antes que en el período τ ($> t$), se define como el premio mínimo que aceptaría como compensación, para posponer el equivalente de un dólar marginal de gasto de consumo. Las condiciones de primer grado para la maximización condicionada de la utilidad requieren que el consumidor iguale sus tipos de preferencia temporal a los correspondientes tipos de rendimiento del mercado. Los efectos sustitución y renta con respecto a cambios en el tipo de interés, pueden definirse análogamente al caso de un período.

Se supone que el empresario formula un plan de producción para un horizonte de planificación que abarca L períodos y $(L + 1)$ fechas de mercado. En la fecha de mercado t^a vende los outputs producidos durante el período $(t - 1)$ y adquiere inputs para su empleo en el proceso de producción del período t^o. El empresario desea maximizar el valor presente de los ingresos netos de la operación sujeto a las reglas técnicas especificadas en su función de producción de período múltiple. Las condiciones de primer orden exigen que iguale las relaciones de sustitución de inputs y outputs a las razones de los precios descontados. Las de segundo orden se derivan también de aquellas del análisis general de un solo período.

El análisis de los problemas de inversión del empresario puede simplificarse suponiendo que los precios presentes y los esperados permanecen inalterados, y que el empresario combina siempre inputs y produce outputs de forma que las *RTS* intraperiódicas y las *RTP* se igualan a las razones apropiadas de los precios. La función de oportunidades de inversión del empresario relaciona sus gastos de inversión y sus ingresos bajo el supuesto de que el empresario realiza la optimización preliminar anterior. Los tipos internos de rendimiento marginal se definen para cada una de las inversiones con respecto a cada uno de los ingresos. Las condiciones de primer grado requieren que cada tipo interno de rendimiento marginal sea igual al correspondiente tipo de rendimiento del mercado. Las de segundo grado implican que cada uno de los tipos internos de rendimiento marginal sea decreciente. El análisis general se aplica al caso especial del punto-input-punto-output.

Los análisis de los equilibrios de un mercado y del multimercado pueden generalizarse para incluir el tipo de interés corriente y las expectativas multiperiódicas.

Apéndice: nota sobre la extensión del período de inversión

La producción capitalista se caracteriza por el hecho de que existe un transcurso del tiempo entre el empleo de inputs y la obtención de los outputs resultantes. La aproximación multiperiódica tiende a oscurecer algunos de los aspectos temporales de la producción capitalista. Pese a que las variables están fechadas, se supone que los horizontes empresariales son de longitud fija, y en consecuencia el tiempo no entra en el análisis como variable. En el caso punto-input-punto-output, el lapso de tiempo para el que se invirtieron los inputs es, por definición, igual a un período, y no está afectado por cambios en el tipo de interés. Los miembros de la "escuela austriaca" de la teoría del capital, consideraron que la longitud del período de inversión, o del "período de producción", como lo llamaron, era la variable decisiva de la teoría de la inversión y del capital.[11]

La consideración del período de inversión en el caso punto-input-punto-output requiere la adopción de un punto de vista alternativo, en el que se trata al tiempo como variable continua y en el que las adquisiciones y ventas se pueden realizar en cualquier punto del tiempo. Para proporcionar una unidad con la que medir el tiempo, es preciso un período de tiempo, tal como un año, pero el concepto no tiene otro sentido que ése. Como el tiempo transcurrido es ahora una variable, hagamos que $t = 0$ represente el presente. El valor $t = \tau$ representa así un punto en el tiempo τ períodos, puesto que τ ya no tiene por qué ser un número entero.

Los conceptos de la Sección 8-1 no permiten la determinación de los valores presente y futuros de las cantidades debidas en fechas para las que t no es un número entero. Como se supone que el tiempo es una variable continua, se admite igualmente que el interés se compone continuamente. Mediante métodos avanzados,[12] puede probarse que si el interés se compone continuamente, el valor del principal y del interés compuesto en el tiempo t de una inversión presente de w dólares, es

$$we^{it}$$

11. Véase Eugen v. Böhm-Bawerk, *The Positive Theory of Capital*, traducido por W. Smart (New York: G. E. Stechert, n.d.) y Knut Wicksell, *Lectures on Political Economy, traducida por E. Classen* (London: Routledge, 1934) vol. I, págs. 144-195.

12. R. D. G. Allen, *Mathematical Analysis for Economists* (New York: Macmillan, 1938) págs. 228-232, describe estos métodos, aunque no los deriva rigurosamente.

en donde el número irracional $e = 2{,}71828$ (aproximadamente) es la base del sistema de logaritmos naturales e i el tipo de interés anual que se supone permanece inalterado. El valor presente de u dólares pagaderos en el tiempo t es

$$ue^{-it}$$

ya que una inversión peresente de ue^{-it} dólares en títulos tendrá el valor de u dólares en el tiempo t.

Imaginemos a un empresario inmerso en un proceso punto-input-punto-output de cría de vino. El individuo adquiere una cuba de zumo de uva por I^0 dólares y espera mientras se fermenta y envejece. Supongamos que la fermentación y la maduración son procesos de coste nulo de modo que su único coste es el interés de su inversión inicial. Supongamos además que el valor de las ventas del vino es función de la longitud de su período de crianza $[I(t)]$.

El problema de optimización del empresario consiste en determinar el período de crianza, o sea, el valor de t, que maximice el valor presente de su beneficio:

$$\pi = I(t)e^{-it} - I^0$$

Igualando a cero la derivada de π con respecto a t,

$$\frac{d\pi}{dt} = I'(t)e^{-it} - iI(t)e^{-it} = 0$$

Sacando factor común $e^{-it} \neq 0$ y ordenando términos

$$\frac{I'(t)}{I(t)} = i \tag{8 A-1}$$

El empresario debe igualar su tipo marginal de rendimiento con respecto al tiempo $[I'(t)/I(t)]$ con su tipo marginal de coste con respecto al tiempo (i).

La condición de segundo grado requiere que

$$\frac{d_2\pi}{dt^2} = [I''(t) - 2iI'(t) + i^2I(t)]\, e^{-it} < 0$$

Sustituyendo de (8A-1) i e i^2 y multiplicando todo por $e^{it}/I(t) > 0$

$$\frac{I''(t)I(t) - [I'(t)]^2}{[I(t)]^2} < 0 \tag{8A-2}$$

El tipo de rendimiento marginal con respecto al tiempo debe ser decreciente, o sea, su derivada debe ser negativa. Si (8A-1) y (8A-2) satisfacen $t = \tau$, las ganancias marginales del empresario serán mayores que el *tipo de rendimiento si su período de inversión* fuera ligeramente menor que τ, y serían mayores que el tipo de rendimiento del mercado si el período fuera ligeramente mayor que τ.

El efecto de una alteración del tipo de interés en el período de inversión puede determinarse por diferenciación total de (8A-1):

$$I''(t)\,dt - iI'(t)\,dt - I(t)\,di = 0$$

y

$$\frac{dt}{di} = -\frac{I(t)}{I''(t) - iI'(t)} < 0 \qquad (8A\text{-}3)$$

El numerador de (8A-3) es positivo, y (8A-2) requiere que su denominador sea negativo. Una disminución del tipo de interés llevará al empresario a alargar su período de inversión.

El período de inversión es un concepto muy significativo para procesos de producción del tipo punto-input-punto-output como en el caso de la crianza de vinos y en el de las plantaciones y cultivo de árboles. El período de inversión proporciona una descripción del "método de producción" y varía de la forma ya conocida con el tipo de interés. Algunos miembros de la escuela austriaca intentaron la tarea imposible de generalizar los resultados del caso punto-input-punto-output a casos más complejos, definiendo períodos de inversión medios. Es imposible definir períodos de inversión en el caso multipunto-input-multipunto-output ya que es imposible atribuir outputs particulares a inputs específicos. Pero ésta no es la única dificultad. En el caso punto-input-punto-output es factible atribuir a los inputs de una fecha determinada la corriente total de output. Existen, por consiguiente, tantos períodos de inversión como elementos en el flujo de outputs. El período medio de inversión debe ser alguna media ponderada de esos períodos. Los valores de los elementos en la corriente de output no pueden usarse como ponderación, ya que los dólares en distintos puntos del tiempo no son idénticos. Si han de ser comparados es necesario descontar los valores intertemporales, pero si se utilizan los valores descontados como elementos de ponderación, entonces, el período medio de inversión no es independiente del tipo de interés.

SELECCIÓN DE CITAS

CARLSON, SUNE, *A Study on the Pure Theory of Production* (Nueva York: Kelley and Millman, 1956). El capítulo VI contiene una teoría sobre producción multiperiódica desarrollada con la ayuda de cálculos elementales.

FISHER, IRVING, *The Theory of Interest* (Nueva York: Kelley and Millman, 1954). Una exposición clásica de muchos de los conceptos de este capítulo comprendiendo descripciones verbales, geométricas y matemáticas.

FRIEDMAN, MILTON, *A Theory of the Consumption Function* (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1957). El capítulo II contiene una teoría sobre consumo multiperiódico. El resto del volumen está dedicado a intentar su verificación estadística.

HICKS, J. R., *Value and Capital* (2.ª ed.; Oxford: Clarendon Press, 1946). Las partes III y IV y el apéndice matemático contienen análisis multiperiódicos. (Trad. al castellano: Fondo de Cultura Económica, Méjico.)

LUTZ, FRIEDRICH y VERA, *The Theory of Investment of the Firm* (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1951). Un estudio detallado de problemas diversos de la inversión en los que se trata el tiempo como variable continua. Conocimientos de cálculo diferencial e integral son una ayuda notable, aunque no son indispensables.

MODIGLIANI, FRANCO, y RICHARD BRUMBERG, *Utility Analysis and the Consumption Function*, en Kenneth K. Kurihara (ed.), "Post Keynesian Economics (New Brunswick, N. J.: Rutgers University Press, 1954), pp. 388-436. Un estudio teórico y empírico de los modelos de consumo de duración de una vida. Se requieren algunos conocimientos de cálculo y estadísticas matemáticas.